RANGO DE UNA MATRIZ

El rango de una matriz Es el número de filas (o columnas) linealmente independientes.
También podemos decir que el rango es: el orden de la mayor submatriz cuadrada no nula. Utilizando esta definición se puede calcular el rango usando determinantes.

Cálculo del rango de una matriz por determinantes

1 Podemos descartar una fila (o columna) si:

- Todos sus coeficientes son ceros.
- Hay dos filas (o columnas) iguales.
- Una fila (o columna) es proporcional a otra.
- Una fila (o columna) es combinación lineal de otras.

Suprimimos la tercera columna porque es combinación lineal de las dos primeras: $c_3 = c_1 + c_2$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & 17 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

2 Comprobamos que las dos primeras columnas NO son proporcionales, entonces tendrá **rango mayor o igual que 2.** Si existe alguna submatriz cuadrada de orden 2, tal que su determinante no sea nulo.

3 Tendrá rango mayor o igual que 3 si existe alguna submatriz cuadrada de orden 3, tal que su determinante no sea nulo.

Como todos los determinantes de las submatrices son nulos tiene **rango menor que 3**, por tanto **r(B) = 2**.

En general, los pasos a seguir para el cálculo del rango por determinantes son:
El rango es el orden de la mayor submatriz cuadrada no nula.

1 Descartamos las filas (o columnas) que cumplan las condiciones vistas anteriormente.
2 El rango será **mayor o igual a 2** si existe alguna submatriz cuadrada de orden 2, tal que su determinante no sea nulo. O encuentre DOS filas o columnas NO proporcionales.
4 El rango será **mayor o igual a 3** si existe alguna submatriz cuadrada de orden 3, tal que su determinante no sea nulo.
5 El rango será **mayor o igual a 4** si existe alguna submatriz cuadrada de orden 4, tal que su determinante no sea nulo.

EJEMPLOS:

a) Sea la matriz *A* una matriz de orden tres. Hallar el rango (*A*).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Como *A* es una matriz cuadrada de orden tres, como máximo el rango (*A*) puede valer tres. Calcularemos primero el determinante o determinantes de las submatrices de orden dos de *A*. Así pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

Ya que el resultado es cero, probaremos con todas las submatrices de *A* hasta encontrar una cuyo determinante no sea cero. Si no encontramos ninguna, el rango (*A*) = 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-15) = 2 + 15 = 17 \neq 0.$$

Puesto que el resultado de calcular el determinante de esta submatriz de *A* no es nulo, podemos afirmar de momento que el rango (*A*) = 2.

También podríamos haber comprobado (normalmente es más rápido) que las dos primeras columnas NO son proporcionales, y por eso el rango por lo menos es 2.
Añadimos ahora una columna y una fila más para ver si el rango puede ser tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 0 + 15 - 0 - 24 + 2 = 17 \neq 0.$$

Dado que el determinante de *A* no es nulo y a su vez es de orden tres, el rango (*A*) = 3.

No necesariamente para poder calcular el rango de una matriz, ésta tiene que ser cuadrada. Así, en el siguiente ejemplo:

Calcular el rango de la matriz *B* de orden 3 ´ 4.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 = -1 \neq 0.$$

Como hay una determinante de orden dos no nulo, el rango de la matriz *B* es mayor o igual que 2.
Calculamos a continuación los determinantes de orden superior:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 2 + 4 + 4 - 2 = 0.$$

Significa que hay una fila o columna que es CL del resto, la quitamos y cogemos el determinante con las dos primeras que ya he comprobado que son LI , y la tercera

Probamos con un segundo determinante de orden tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 0 + 0 + 12 + 1 = 3 \neq 0.$$

Así pues, como hay un determinante de orden tres que no es nulo, el rango (B) = 3.

Un rango mayor que 3 no se puede hallar, ya que no se puede formar un determinante de orden 4. Recuérdese que para poder calcular el determinante de una matriz o de una submatriz, éstas tienen que ser cuadradas.

VER LOS SIGUIENTES VÍDEOS:

https://youtu.be/jHP6TdVUT5o

https://youtu.be/M_C6zuF8hAQ

https://youtu.be/QO-e2OJlPTQ

Ejercicio 9. Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son linealmente independies.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(Solución: a) $\text{rg}(A) = 3$, b) $\text{rg}(B) = 2$, c) $\text{rg}(C) = 2$, d) $\text{rg}(D) = 4$)