3 Ecuaciones y sistemas

LEE Y COMPRENDE

¿Qué modelizan las ecuaciones de Lotka – Volterra?

Las ecuaciones de Lotka – Volterra modelizan las variaciones en el tamaño de las poblaciones correspondientes a dos especies que habitan en el mismo lugar y que compiten entre sí.

¿Bajo qué condiciones tienen sentido? ¿Por qué?

Las ecuaciones tienen sentido siempre que las condiciones sean más o menos de aislamiento; es decir, sin la interferencia de agentes externos.

REFLEXIONA Y CONTESTA

¿Qué otras ecuaciones conoces? ¿Qué modelizan? ¿Por qué crees que son importantes?

Respuesta libre.

Actividades propuestas

1. Resuelve estas ecuaciones.

a) $\frac{1-x}{3}=\frac{x}{2}-\frac{x+1}{6}$ **c)** $3x(x + 3) = 9x + 12$ **e)** $9x^2 + 9x - 10 = 0$

b) $x(x + 5) = x(x - 1) + 2$ **d)** $(x-1)\left(\frac{3-x}{2}\right)=4$ **f)** $3x^2 + 5x = 5(x + 135)$

a) $\frac{1-x}{3}=\frac{x}{2}-\frac{x+1}{6}\Rightarrow\frac{2-2x}{6}=\frac{3x}{6}-\frac{x+1}{6}\Rightarrow 2-2x=3x-x-1\Rightarrow 2+1=3x-x+2x\Rightarrow 3=4x\Rightarrow x=\frac{3}{4}$

b) $x(x + 5) = x(x - 1) + 2 \Rightarrow x^2 + 5x = x^2 - x + 2 \Rightarrow 5x + x = 2 \Rightarrow 6x = 2 \Rightarrow x=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

c) $3x(x + 3) = 9x + 12 \Rightarrow 3x^2 + 9x = 9x + 12 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

d) $(x-1)\left(\frac{3-x}{2}\right)=4\Rightarrow\frac{3x-x^2-3+x}{2}=4\Rightarrow -x^2+4x-3=8\Rightarrow x^2-4x+11=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-44}}{2}$ Sin solución

e) $9x^2+9x-10=0\Rightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{81+360}}{18}=\frac{-9\pm 21}{18}=\begin{cases}-\frac{30}{18}=-\frac{5}{3}\\ \frac{12}{18}=\frac{2}{3}\end{cases}$

f) $3x^2 + 5x = 5(x + 135) \Rightarrow 3x^2 + 5x = 5x + 675 \Rightarrow 3x^2 = 675 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow x = \pm 15$

2. Encuentra las soluciones de estas ecuaciones.

a) $\mathbf{x^2 - 6x - 7 = 0}$

b) $\mathbf{x^2 - 6x + 9 = 0}$

c) $\mathbf{-2x(x - 1) = x^2 - 5x}$

d) $\mathbf{x^2 - x(3x + 1) = 3}$

a) $x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \dfrac{6 \pm 8}{2} = \begin{cases} 7 \\ -1 \end{cases}$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ (Doble)

c) $-2x(x - 1) = x^2 - 5x \Rightarrow -2x^2 + 2x = x^2 - 5x \Rightarrow -2x^2 + 2x - x^2 + 5x = 0 \Rightarrow -3x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(-3x + 7) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = \dfrac{7}{3}$

d) $x^2 - x(3x + 1) = 3 \Rightarrow x^2 - 3x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-24}}{4}$ Sin solución

3. Halla las soluciones de las ecuaciones siguientes.

a) $\mathbf{x^3 - 5x^2 + 6x = 0}$

b) $\mathbf{2x^4 - 6x^3 - 32x^2 + 96x = 0}$

c) $\mathbf{2x^4 + 5x^3 = x^2 - 3x + 9}$

d) $\mathbf{x^3 - 5x - 2 = 0}$

a) $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6) = x(x - 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 3$ y $x = 2$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

b) $2x^4 - 6x^3 - 32x^2 + 96x = 2x(x^3 - 3x^2 - 16x + 48) = 2x(x - 3)(x - 4)(x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 3$ y $x = \pm 4$.

	1	–3	–16	48
3		3	0	–48
	1	0	–16	0

$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \pm 4$

c) $2x^4 + 5x^3 = x^2 - 3x + 9 \Rightarrow 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = -3$

	2	5	–1	3	–9
1		2	7	6	9
	2	7	6	9	0
–3		–6	–3	–9	
	2	1	3	0	

$2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-24}}{4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-23}}{4}$ Sin solución

d) $x^3 - 5x - 2 = (x+2)\left(x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = 1 + \sqrt{2},\ x = 1 - \sqrt{2}$

	1	0	–5	–2
–2		–2	4	2
	1	–2	–1	0

$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ **c)** $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$ **d)** $2x^4 - 6x^2 - 20 = 0$

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ y $x^2 = z \Rightarrow z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{5+3}{2} = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ z = \dfrac{5-3}{2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

b) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ y $x^2 = z \Rightarrow z^2 + 10z + 9 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-10 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-10+8}{2} = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \text{ Sin solución} \\ z = \dfrac{-10-8}{2} = -9 \Rightarrow x^2 = -9 \text{ Sin solución} \end{cases}$

c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$ y $x^2 = z \Rightarrow z^2 - 4z - 12 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{4 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{4+8}{2} = 6 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6} \\ z = \dfrac{4-8}{2} = -2 \Rightarrow x^2 = -2 \text{ Sin solución} \end{cases}$

d) $2x^4 - 6x^2 - 20 = 0$ y $x^2 = z \Rightarrow 2z^2 - 6z - 20 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{6 \pm \sqrt{196}}{4} \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{6+14}{4} = 5 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \\ z = \dfrac{6-14}{4} = -2 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow \text{Sin solución} \end{cases}$

5. Halla la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $x(x^2 - 4) = x^2 + 8x$ **c)** $x^{2012} - x^{2011} = 0$

b) $(x - 5)(2x + 7)(x + 3) = 0$ **d)** $x^5 - 3x^3 - 4x = 0$

a) $x(x^2 - 4) = x^2 + 8x \Rightarrow x^3 - 4x = x^2 + 8x \Rightarrow x^3 - x^2 - 4x - 8x = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 12) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$, $x = 4$ y $x = -3$

$$x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$

b) $(x - 5)(2x + 7)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 5$, $x = \dfrac{-7}{2}$, $x = -3$

c) $x^{2012} - x^{2011} = 0 \Rightarrow x^{2011}(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 1$

d) $x^5 - 3x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^4 - 3x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 2$ y $x = -2$

$$\begin{cases} x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \\ z = x^2 \end{cases} \Rightarrow z^2 - 3z - 4 = 0 \Rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{3+5}{2} = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ z = \dfrac{-2}{2} = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{Sin solución} \end{cases}$$

6. Averigua el tiempo máximo que tardarás en hacer este problema sabiendo que usarás $\dfrac{1}{18}$ del tiempo en leerlo, $\dfrac{1}{5}$ en plantearlo, $\dfrac{22}{90}$ en resolverlo y 1'30'' en comprobar que la solución es correcta.

Sea x el tiempo máximo, en minutos, que tardaré en hacer este problema.

$\dfrac{x}{18} + \dfrac{x}{5} + \dfrac{22x}{90} + 1{,}5 = x \Rightarrow 5x + 18x + 22x + 135 = 90x \Rightarrow 135 = 90x - 5x - 18x - 22x \Rightarrow 135 = 45x \Rightarrow x = 3$

Tardaré 3 minutos en resolver el problema.

7. Actividad resuelta.

8. Resuelve estas ecuaciones racionales.

a) $\dfrac{3x}{4x-1}=2$

b) $\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{x+1}{x-1}$

c) $\dfrac{4+x}{2x+1}=\dfrac{x-2}{5-2x}$

d) $-\dfrac{4x+8}{x^2-9}=\dfrac{5x+1}{x+3}$

a) $\dfrac{3x}{4x-1}=2 \Rightarrow 3x = 8x-2 \Rightarrow 2 = 8x-3x \Rightarrow 2 = 5x \Rightarrow x=\dfrac{2}{5}$

b) $\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{x+1}{x-1} \Rightarrow (x-2)(x-1)=(x+1)(x+3) \Rightarrow x^2-3x+2=x^2+4x+3 \Rightarrow -7x-1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{7}$

c) $\dfrac{4+x}{2x+1}=\dfrac{x-2}{5-2x} \Rightarrow (4+x)(5-2x)=(2x+1)(x-2) \Rightarrow 20-3x-2x^2=2x^2-3x-2 \Rightarrow 0=4x^2-22 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2=22 \Rightarrow x^2=\dfrac{22}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{22}{4}}=\pm\dfrac{\sqrt{22}}{2}$

d) $-\dfrac{4x+8}{x^2-9}=\dfrac{5x+1}{x+3} \Rightarrow -(4x+8)(x+3)=(5x+1)(x-3)(x+3) \Rightarrow -(4x+8)=(5x+1)(x-3) \Rightarrow$

$\Rightarrow -4x-8=5x^2-14x-3 \Rightarrow 5x^2-10x+5=0 \Rightarrow 5(x^2-2x+1)=0 \Rightarrow 5(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$ (doble)

9. Halla las soluciones de las ecuaciones racionales siguientes.

a) $\dfrac{x-3}{x^2-4}+\dfrac{x}{x-2}=3$

b) $\dfrac{x+1}{x-3}=5-\dfrac{x+9}{x+2}$

c) $x+\dfrac{4x}{x-4}=\dfrac{16}{x-4}$

d) $\dfrac{3x+2}{9-x^2}=\dfrac{5x+1}{x+3}-\dfrac{1}{3-x}$

a) $\dfrac{x-3}{x^2-4}+\dfrac{x}{x-2}=3 \Rightarrow \dfrac{x-3+x(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{3(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow x-3+x(x+2)=3(x^2-4) \Rightarrow x-3+x^2+2x=3x^2-12$

$\Rightarrow 2x^2-3x-9=0 \Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{3^2+72}}{2\cdot 2}=\dfrac{3\pm 9}{2\cdot 2}=\begin{cases}3\\ \dfrac{-6}{4}=\dfrac{-3}{2}\end{cases}$

b) $\dfrac{x+1}{x-3}=5-\dfrac{x+9}{x+2} \Rightarrow \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{5(x-3)(x+2)-(x+9)(x-3)}{(x-3)(x+2)} \Rightarrow (x+1)(x+2)=5(x^2-x-6)-(x+9)(x-3)$

$\Rightarrow x^2+3x+2=5x^2-5x-30-x^2-6x+27 \Rightarrow 3x^2-14x-5=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{14\pm\sqrt{14^2+60}}{2\cdot 3}=\dfrac{14\pm 16}{6}=\begin{cases}5\\ \dfrac{-2}{6}=\dfrac{-1}{3}\end{cases}$

c) $x+\dfrac{4x}{x-4}=\dfrac{16}{x-4} \Rightarrow \dfrac{x(x-4)+4x}{x-4}=\dfrac{16}{x-4} \Rightarrow x(x-4)+4x=16 \Rightarrow x^2-4x+4x=16 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\begin{cases}4\\-4\end{cases}$

$x = 4$ se descarta porque anula los denominadores de la ecuación. La única solución válida es $x = -4$

d) $\dfrac{3x+2}{9-x^2}=\dfrac{5x+1}{x+3}-\dfrac{1}{3-x} \Rightarrow -\dfrac{3x+2}{x^2-9}=\dfrac{(5x+1)(x-3)+x+3}{x^2-9} \Rightarrow -\dfrac{3x+2}{x^2-9}=\dfrac{5x^2-15x+x-3+x+3}{x^2-9} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{3x+2}{x^2-9}=\dfrac{5x^2-13x}{x^2-9} \Rightarrow -3x-2=5x^2-13x \Rightarrow 5x^2-10x+2=0 \Rightarrow x=\dfrac{10\pm\sqrt{60}}{10}=\dfrac{10\pm 2\sqrt{15}}{10}=\dfrac{5\pm\sqrt{15}}{5}$

10. El día que se iban a repartir 4000 € entre varios socios faltaron 9, con lo que los presentes tocaron a 90 € más cada uno. ¿Cuántos socios son?

Sea x el número de socios.

$$\frac{4000}{x-9} = \frac{4000}{x} + 90 \Rightarrow 4000x = 4000x - 36\,000 + 90x^2 - 810x \Rightarrow x^2 - 9x - 400 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm 41}{2} = \begin{cases} 25 \\ -16 \end{cases}$$

Son 25 socios.

11. Comprueba en cada caso cuáles de los posibles resultados son válidos para la ecuación original.

a) $\sqrt{x+2} + x = 10 \Rightarrow x = 7$ y $x = 14$

b) $\sqrt{x+7} - \sqrt{13-x} = 2 \Rightarrow x = -3$ y $x = 9$

c) $\sqrt{2x-3} = 2 + \sqrt{x-5} \Rightarrow x = 6$ y $x = 14$

d) $\sqrt{30-3x} = 1 + \sqrt{2x-10} \Rightarrow x = 1$ y $x = 7$

a) Si $x = 7 \Rightarrow \sqrt{7+2} + 7 = 10 \Rightarrow 10 = 10 \Rightarrow x = 7$ es solución.

Si $x = 14 \Rightarrow \sqrt{14+2} + 14 = 10 \Rightarrow 18 \neq 10 \Rightarrow x = 14$ no es solución.

b) Si $x = -3 \Rightarrow \sqrt{-3+7} - \sqrt{13+3} = 2 \Rightarrow -2 \neq 2 \Rightarrow x = -3$ no es solución.

Si $x = 9 \Rightarrow \sqrt{9+7} - \sqrt{9+3} = 2 \Rightarrow 2 = 2 \Rightarrow x = 9$ es solución.

c) Si $x = 6 \Rightarrow \sqrt{12-3} = 2 + \sqrt{6-5} \Rightarrow 3 = 3 \Rightarrow x = 6$ es solución.

Si $x = 14 \Rightarrow \sqrt{28-3} = 2 + \sqrt{14-5} \Rightarrow 5 = 5 \Rightarrow x = 14$ es solución.

d) Si $x = 1 \Rightarrow \sqrt{30-3} = 1 + \sqrt{2-10} \Rightarrow 3\sqrt{3} \neq 1 + \sqrt{-8}$ (No existe) $\Rightarrow x = 1$ no es solución.

Si $x = 7 \Rightarrow \sqrt{30-21} = 1 + \sqrt{14-10} \Rightarrow 3 = 3 \Rightarrow x = 7$ es solución.

12. Resuelve estas ecuaciones con un radical.

a) $\sqrt{x+3} + 1 = x - 8$

b) $x + 4 + 5\sqrt{x-2} = 0$

c) $x = 2 - \sqrt{8-x}$

d) $\sqrt{12-x} - x = 8$

a) $\sqrt{x+3} + 1 = x - 8 \Rightarrow \sqrt{x+3} = x - 9 \Rightarrow \left(\sqrt{x+3}\right)^2 = (x-9)^2 \Rightarrow x + 3 = x^2 - 18x + 81 \Rightarrow x^2 - 19x + 78 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 13 \\ 6 \end{cases}$

- $\sqrt{13+3} + 1 = 13 - 8 \Rightarrow x = 13$ es solución.
- $\sqrt{6+3} + 1 \neq 6 - 8 \Rightarrow x = 6$ no es solución.

b) $x + 4 + 5\sqrt{x-2} = 0 \Rightarrow x + 4 = -5\sqrt{x-2} \Rightarrow (x+4)^2 = \left(-5\sqrt{x-2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + 16 + 8x = 25x - 50 \Rightarrow x^2 - 17x + 66 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{17 \pm 5}{2} = \begin{cases} 11 \\ 6 \end{cases}$

- $11 + 4 + 5\sqrt{11-2} \neq 0 \Rightarrow x = 11$ no es solución.
- $6 + 4 + 5\sqrt{6-2} \neq 0 \Rightarrow x = 6$ no es solución.

c) $x = 2 - \sqrt{8-x} \Rightarrow x - 2 = -\sqrt{8-x} \Rightarrow (x-2)^2 = \left(-\sqrt{8-x}\right)^2 \Rightarrow x^2 + 4 - 4x = 8 - x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

- $4 \neq 0 = 2 - \sqrt{8-4} \Rightarrow x = 4$ no es solución.
- $-1 = 2 - \sqrt{8+1} \Rightarrow x = -1$ es solución.

d) $\sqrt{12-x} - x = 8 \Rightarrow \sqrt{12-x} = 8 + x \Rightarrow \left(\sqrt{12-x}\right)^2 = (8+x)^2 \Rightarrow 12 - x = 64 + x^2 + 16x \Rightarrow 64 + x^2 + 16x - 12 + x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 17x + 52 = 0 \Rightarrow x = \frac{-17 \pm 9}{2} = \begin{cases} -13 \\ -4 \end{cases}$

- $\sqrt{12+13} + 13 \neq 8 \Rightarrow x = -13$ no es solución.
- $\sqrt{12+4} + 4 = 8 \Rightarrow x = -4$ es solución.

13. Resuelve estas ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4}$

b) $\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+1} = 2$

c) $\sqrt{x+9} = 1 + \sqrt{x+2}$

d) $\sqrt{5-4x} - \sqrt{2x+7} + 2 = 0$

a) $\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4} \Rightarrow \left(\sqrt{7x+1}\right)^2 = \left(2\sqrt{x+4}\right)^2 \Rightarrow 7x+1 = 4x+16 \Rightarrow 7x-4x = 16-1 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$

- $\sqrt{35+1} = 6 = 2\sqrt{5+4} \Rightarrow x = 5$ es solución.

b) $\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow \sqrt{5x+1} = \sqrt{x+1} + 2 \Rightarrow \left(\sqrt{5x+1}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1}+2\right)^2 \Rightarrow 5x+1 = x+1+4+4\sqrt{x+1} \Rightarrow$

$4x-4 = 4\sqrt{x+1} \Rightarrow x-1 = \sqrt{x+1} \Rightarrow (x-1)^2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 \Rightarrow x^2+1-2x = x+1 \Rightarrow x^2-3x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}$

- $\sqrt{5\cdot 0+1} - \sqrt{0+1} \neq 2 \Rightarrow x = 0$ no es solución.
- $\sqrt{5\cdot 3+1} - \sqrt{3+1} = 2 \Rightarrow x = 3$ es solución.

c) $\sqrt{x+9} = 1 + \sqrt{x+2} \Rightarrow \left(\sqrt{x+9}\right)^2 = \left(1+\sqrt{x+2}\right)^2 \Rightarrow x+9 = 1+x+2+2\sqrt{x+2} \Rightarrow 6 = 2\sqrt{x+2} \Rightarrow 3 = \sqrt{x+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^2 = \left(\sqrt{x+2}\right)^2 \Rightarrow 9 = x+2 \Rightarrow x = 7$

- $\sqrt{7+9} = 1 + \sqrt{7+2} \Rightarrow x = 7$ es solución.

d) $\sqrt{5-4x} - \sqrt{2x+7} + 2 = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{5-4x}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+7}-2\right)^2 \Rightarrow 5-4x = 2x+7+4-4\sqrt{2x+7} \Rightarrow 4\sqrt{2x+7} = 6x+6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(2\sqrt{2x+7}\right)^2 = (3x+3)^2 \Rightarrow 4(2x+7) = 9x^2+9+18x \Rightarrow 8x+28 = 9x^2+9+18x \Rightarrow 9x^2+9+18x-8x-28 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x^2+10x-19 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-10 \pm 28}{18} = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{-38}{18} = \dfrac{-19}{9} \end{cases}$

- $\sqrt{5-4} - \sqrt{2+7} + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ es solución.
- $\sqrt{5+\dfrac{76}{9}} - \sqrt{\dfrac{-38}{9}+7} + 2 \neq 0 \Rightarrow x = \dfrac{-19}{9}$ es solución.

14. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales.

a) $x+\sqrt{2x^2-7x+5}=1$ **c)** $\sqrt{x^2-8x+22}=2(x-1)$

b) $4x-1=3\sqrt{x^2+9}$ **d)** $\sqrt{2x^2+1}=2x+\sqrt{x+3}$

a) $x+\sqrt{2x^2-7x+5}=1 \Rightarrow \sqrt{2x^2-7x+5}=1-x \Rightarrow \left(\sqrt{2x^2-7x+5}\right)^2=(1-x)^2 \Rightarrow 2x^2-7x+5=1+x^2-2x \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=\dfrac{5\pm3}{2}=\begin{cases}4\\1\end{cases}$

- $4+\sqrt{32-28+5}\neq1 \Rightarrow x=4$ no es solución.
- $1+\sqrt{2-7+5}=1 \Rightarrow x=1$ es solución.

b) $4x-1=3\sqrt{x^2+9} \Rightarrow (4x-1)^2=\left(3\sqrt{x^2+9}\right)^2 \Rightarrow 16x^2+1-8x=9x^2+81 \Rightarrow 7x^2-8x-80=0 \Rightarrow x=\dfrac{8\pm\sqrt{2034}}{14} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{8\pm48}{14}=\begin{cases}4\\ \dfrac{-40}{14}=\dfrac{-20}{7}\end{cases}$

- $16-1=3\sqrt{16+9} \Rightarrow x=4$ es solución.
- $\dfrac{-80}{7}-1\neq3\sqrt{\dfrac{400}{49}+9} \Rightarrow x=\dfrac{-20}{7}$ no es solución.

c) $\sqrt{x^2-8x+22}=2(x-1) \Rightarrow \left(\sqrt{x^2-8x+22}\right)^2=(2(x-1))^2 \Rightarrow x^2-8x+22=4x^2+4-8x \Rightarrow 3x^2-18=0 \Rightarrow 3x^2=18 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2=6 \Rightarrow x\pm\sqrt{6}$

- $\sqrt{28-8\sqrt{6}}=2\left(\sqrt{6}-1\right) \Rightarrow x=\sqrt{6}$ es solución.
- $\sqrt{28+8\sqrt{6}}\neq2\left(\sqrt{6}-1\right) \Rightarrow x=-\sqrt{6}$ no es solución.

d) $\sqrt{2x^2+1}=2x+\sqrt{x+3} \Rightarrow \left(\sqrt{2x^2+1}\right)^2=\left(2x+\sqrt{x+3}\right)^2 \Rightarrow 2x^2+1=4x^2+x+3+4x\sqrt{x+3} \Rightarrow -4x\sqrt{x+3}=2x^2+x+2$

$\left(-4x\sqrt{x+3}\right)^2=\left(2x^2+x+2\right)^2 \Rightarrow 16x^2(x+3)=4x^4+x^2+4+4x^3+8x^2+4x \Rightarrow 16x^3+48x^2=4x^4+4x^3+9x^2+4x+4$

$0=4x^4-12x^3-39x^2+4x+4$

	4	–12	–39	4	4
–2		–8	40	–2	–4
	4	–20	1	2	0

La única raíz entera es x = –2.

- $\sqrt{2(-2)^2+1}=3\neq2(-2)+\sqrt{-2+3} \Rightarrow x=-2$ no es solución.

15. La diagonal de un marco de fotos rectangular mide 2 cm más que el lado mayor. Si el perímetro mide 46 cm, ¿cuánto miden los lados del marco?

Sea x la medida del lado mayor, e y, la del lado menor.

$\begin{cases}2x+2y=46\\x^2+y^2=(x+2)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=23-x\\x^2+y^2=(x+2)^2\end{cases} \Rightarrow x^2+(23-x)^2=(x+2)^2 \Rightarrow x^2+529+x^2-46x=x^2+4+4x \Rightarrow$

$x^2-50x+525=0 \Rightarrow x=\dfrac{50\pm\sqrt{400}}{2}=\dfrac{50\pm20}{2}=\begin{cases}15\\35\end{cases}$

Si $x=15 \Rightarrow y=8$, si $x=35 \Rightarrow y=-12$

El lado mayor mide 15 cm y el menor, 8 cm.

16. Resuelve mentalmente estas ecuaciones en las que aparecen logaritmos.

a) $\log x = 6$

b) $\log_x 16 = 2$

c) $\log_x x = 1$

d) $\log (x + 300) = 3$

e) $\log (6 - x) = 0$

f) $\log_3 x^7 = 7$

a) $x = 10^6 \Rightarrow \log 10^6 = 6$

b) $x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \log_4 16 = 2$

c) $x^1 = x \Rightarrow \log_x x = 1$ con $x \neq 1$ y $x > 0$

d) $10^3 = x + 300 \Rightarrow x = 700 \Rightarrow \log (700 + 300) = 3$

e) $10^0 = 6 - x \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \log (6 - 5) = 0$

f) $3^7 = x^7 \Rightarrow \log_3 3^7 = 7$

17. Actividad resuelta.

18. Resuelve las ecuaciones logarítmicas siguientes.

a) $\log x + \log(x + 1) = \log 6$

b) $\log_2 x - 1 = \log_2 (x - 16)$

a) $\log x + \log(x + 1) = \log 6 \Rightarrow \log [x(x + 1)] = \log 6 \Rightarrow x(x + 1) = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

- $\log (-3)$ no existe $\Rightarrow x = 3$ no es solución.
- $\log 2 + \log 3 = \log 6 \Rightarrow x = 2$ es solución.

b) $\log_2 x - 1 = \log_2 (x - 16) \Rightarrow \log_2 x - \log_2 (x - 16) = 1 \Rightarrow \log_2 \dfrac{x}{x-16} = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{x-16} = 2 \Rightarrow x = 2x - 32 \Rightarrow x = 32$

- $\log_2 32 - 1 = \log_2 2^5 - 1 = 5 - 1 = 4 = \log_2 16 = \log_2 (32 - 16) \Rightarrow x = 32$ es solución.

19. Resuelve las ecuaciones logarítmicas siguientes.

a) $\log (x^2 - 15x) = 2$

b) $\log_5 x - 1 = \log_5 (x - 64)$

c) $\log_9 (x + 1) - \log_9 (1 - x) = \log_9 (2x + 3)$

a) $\log (x^2 - 15x) = 2 \Rightarrow x^2 - 15x = 10^2 \Rightarrow x^2 - 15x - 100 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{15 \pm 25}{2} = \begin{cases} 20 \\ -5 \end{cases}$

- $\log (20^2 - 15 \cdot 20) = \log 100 = 2 \Rightarrow x = 20$ es solución.
- $\log (25 + 15 \cdot 5) = \log 100 = 2 \Rightarrow x = -5$ es solución.

b) $\log_5 x - 1 = \log_5 (x - 64) \Rightarrow \log_5 x - \log_5 (x - 64) = 1 \Rightarrow \log_5 \dfrac{x}{x-64} = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{x-64} = 5 \Rightarrow x = 5x - 320 \Rightarrow x = 80$

- $\log_5 80 - 1 = \log_5 80 - \log_5 5 = \log_5 16 = \log_5 (80 - 64) \Rightarrow x = 80$ es solución.

c) $\log_9 (x + 1) - \log_9 (1 - x) = \log_9 (2x + 3) \Rightarrow \log_9 \left(\dfrac{x+1}{1-x}\right) = \log_9 (2x+3) \Rightarrow \dfrac{x+1}{1-x} = 2x + 3 \Rightarrow x + 1 = (1 - x)(2x + 3)$

$\Rightarrow x + 1 = 2x + 3 - 2x^2 - 3x \Rightarrow 2x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

- $\log_9 \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) - \log_9 \left(1 - \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \log_9 \left(2 \cdot \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} + 3\right) \Rightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ es solución.
- $\log_9 \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} + 1\right) - \log_9 \left(1 - \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \neq \log_9 \left(2 \cdot \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} + 3\right) \Rightarrow x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ no es solución.

20. Halla la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $\log x = \frac{1}{2}\log(x+2)$

c) $\log\sqrt{x} = 1 - \log\sqrt{3x+5}$

b) **log *x* - log (*x* + 3) = –1**

d) $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1$

a) $\log x = \frac{1}{2}\log(x+2) \Rightarrow \log x = \log\left(\sqrt{x+2}\right) \Rightarrow x = \sqrt{x+2} \Rightarrow x^2 = \left(\sqrt{x+2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

- $2 = \sqrt{2+2} \Rightarrow x = 2$ es solución de $x = \sqrt{x+2}$ y $\log 2 = \frac{1}{2}\log(2+2) \Rightarrow x = 2$ es solución.
- log (–1) no existe $\Rightarrow x = -1$ no es solución.

b) log *x* - log (*x* + 3) = –1 $\Rightarrow \log\frac{x}{x+3} = -1 \Rightarrow \frac{x}{x+3} = \frac{1}{10} \Rightarrow 10x = x + 3 \Rightarrow 9x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

- $\log\frac{1}{3} - \log\left(\frac{1}{3} + 3\right) = \log\frac{1}{3} - \log\frac{10}{3} = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ es solución.

c) $\log\sqrt{x} = 1 - \log\sqrt{3x+5} \Rightarrow \log\sqrt{x} + \log\sqrt{3x+5} = 1 \Rightarrow \log\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{3x+5}\right) = 1 \Rightarrow \log\left(\sqrt{3x^2+5x}\right) = 1 \Rightarrow \sqrt{3x^2+5x} = 10$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{3x^2+5x}\right)^2 = 10^2 \Rightarrow 3x^2 + 5x = 100 \Rightarrow 3x^2 + 5x - 100 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm 35}{6} = \begin{cases} \frac{-40}{6} = \frac{-20}{3} \\ 5 \end{cases}$$

- $\sqrt{3\cdot 5^2 + 5\cdot 5} = 10 \Rightarrow x = 2$ es solución de $\sqrt{3x^2+5x} = 10$ y $\log\sqrt{5} = 1 - \log\sqrt{20} \Rightarrow x = 5$ es solución.
- $\sqrt{\frac{-20}{3}}$ no existe $\Rightarrow x = \frac{-20}{3}$ no es solución.

d) $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1 \Rightarrow \sqrt[5]{27} = 9^{2x-1} \Rightarrow 3^{\frac{3}{5}} = 3^{2(2x-1)} \Rightarrow \frac{3}{5} = 2(2x-1) \Rightarrow \frac{3}{5} = 4x - 2 \Rightarrow 3 = 20x - 10 \Rightarrow 20x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{20}$

21. Actividad resuelta.

22. ¿Qué relación debe existir entre *A* y *B* para que se cumpla la relación log *A* = log *B* – log 3?

log *A* = log *B* – log 3 $\Rightarrow \log A = \log\frac{B}{3} \Rightarrow A = \frac{B}{3}$

23. Despeja *m* en la siguiente igualdad.

log *m* = *b* – log*n*

log *m* = *b* – log*n* $\Rightarrow$ log *m* + log*n* = *b* $\Rightarrow$ log (*mn*) = *b* $\Rightarrow$ *mn* = $10^b \Rightarrow m = \frac{10^b}{n}$

24. Resuelve las ecuaciones exponenciales expresando las potencias en la misma base.

a) $2^{3x-4} = 64$

b) $2^{x+1} = 1024$

a) $2^{3x-4} = 64 \Rightarrow 2^{3x-4} = 2^6 \Rightarrow 3x - 4 = 6 \Rightarrow 3x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$

b) $2^{x+1} = 1024 \Rightarrow 2^{x+1} = 2^{10} \Rightarrow x + 1 = 10 \Rightarrow x = 9$

25. Resuelve estas ecuaciones exponenciales tomando logaritmos y usando la calculadora.

a) $5^{x+3} = 9999$ **c)** $5^{x} = 2^{x+3}$

b) $10^{3-x} = 2^{x} \cdot 128$ **d)** $2^{-x} = 10\,000$

a) $5^{x+3} = 9999 \Rightarrow \log 5^{x+3} = \log 9999 \Rightarrow (x+3)\log 5 = \log 9999 \Rightarrow x+3 = \dfrac{\log 9999}{\log 5} \Rightarrow x = \dfrac{\log 9999}{\log 5} - 3 = 2{,}72$

b) $10^{3-x} = 2^{x} \cdot 128 \Rightarrow 10^{3-x} = 2^{x} \cdot 2^{7} \Rightarrow 10^{3-x} = 2^{x+7} \Rightarrow \log 10^{3-x} = \log 2^{x+7} \Rightarrow (3-x)\log 10 = (x+7)\log 2 \Rightarrow$

$3\log 10 - x\log 10 = x\log 2 + 7\log 2 \Rightarrow 3\log 10 - 7\log 2 = x\log 10 + x\log 2 \Rightarrow 3\log 10 - 7\log 2 = x(\log 10 + \log 2)$

$\Rightarrow x = \dfrac{3\log 10 - 7\log 2}{\log 10 + \log 2} = 0{,}687$

c) $5^{x} = 2^{x+3} \Rightarrow \log 5^{x} = \log 2^{x+3} \Rightarrow x\log 5 = (x+3)\log 2 \Rightarrow x\log 5 = x\log 2 + 3\log 2 \Rightarrow x\log 5 - x\log 2 = 3\log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(\log 5 - \log 2) = 3\log 2 \Rightarrow x = \dfrac{3\log 2}{\log 5 - \log 2} = 2{,}27$

d) $2^{-x} = 10\,000 \Rightarrow \log 2^{-x} = \log 10\,000 \Rightarrow -x\log 2 = \log 10\,000 \Rightarrow -x\log 2 = 4 \Rightarrow x = -\dfrac{4}{\log 2} = -13{,}29$

26. Halla las soluciones de estas ecuaciones utilizando un cambio de variable.

a) $4^{x} - 9 \cdot 2^{x} + 8 = 0$ **c)** $2^{3+2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 1 = 0$

b) $4^{x} - 8 = 2^{x+1}$ **d)** $\dfrac{1}{2^{x-3}} = 5 - 2^{x-1}$

a) $4^{x} - 9 \cdot 2^{x} + 8 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^{x} + 8 = 0$

$2^{x} = z \Rightarrow z^{2} - 9z + 8 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} = \dfrac{9 \pm 7}{2} = \begin{cases} 8 \Rightarrow 2^{x} = 8 \Rightarrow x = 3 \\ 1 \Rightarrow 2^{x} = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

b) $4^{x} - 8 = 2^{x+1} \Rightarrow 2^{2x} - 8 = 2 \cdot 2^{x} \Rightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^{x} - 8 = 0$

$2^{x} = z \Rightarrow z^{2} - 2z - 8 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{2 \pm \sqrt{2+32}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \Rightarrow 2^{x} = 4 \Rightarrow x = 2 \\ -2 \Rightarrow 2^{x} = -2 \Rightarrow \text{Sin solución} \end{cases}$

c) $2^{3+2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 1 = 0 \Rightarrow 2^{3} \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2 \cdot 2^{x} + 1 = 0 \Rightarrow 8 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^{x} + 1 = 0$

$2^{x} = z \Rightarrow 8z^{2} - 6z + 1 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-32}}{16} = \dfrac{6 \pm 2}{16} = \begin{cases} \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4} = 2^{-2} \Rightarrow 2^{x} = 2^{-2} \Rightarrow x = -2 \\ \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2} = 2^{-1} \Rightarrow 2^{x} = 2^{-1} \Rightarrow x = -1 \end{cases}$

d) $\dfrac{1}{2^{x-3}} = 5 - 2^{x-1} \Rightarrow \dfrac{8}{2^{x}} = 5 - \dfrac{2^{x}}{2}$

$2^{x} = z \Rightarrow \dfrac{8}{z} = 5 - \dfrac{z}{2} \Rightarrow 16 = 10z - z^{2} \Rightarrow z^{2} - 10z + 16 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \dfrac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} 8 \Rightarrow 2^{x} = 8 \Rightarrow x = 3 \\ 2 \Rightarrow 2^{x} = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

27. Actividad interactiva.

28. Resuelve estos sistemas por el método que consideres más adecuado en cada caso.

a) $\begin{cases} 5x + y = 13 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x + 3y = -13 \end{cases}$

a) Se resuelve el sistema por el método de sustitución. La solución del sistema es (x = 3 y = –2).

$$\begin{cases} 5x + y = 13 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 13 - 5x \\ 3x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow 3x + 4 \cdot (13 - 5x) = 1 \Rightarrow 3x + 52 - 20x = 1 \Rightarrow 17x = 51 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = -2$$

b) Se resuelve el sistema por el método de reducción. La solución del sistema es $\left(x = \frac{5}{3}, y = \frac{13}{3} \right)$.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - y = -1 \\ \ x + y = \ \ 6 \end{cases} \\ \hline 3x \qquad = 5 \end{array} \Rightarrow x = \frac{5}{3} \Rightarrow 2 \cdot \frac{5}{3} - y = -1 \Rightarrow \frac{10}{3} - y = -1 \Rightarrow y = \frac{10}{3} + 1 = \frac{13}{3}$$

c) Se resuelve el sistema por el método de igualación. La solución del sistema es $\left(x = \frac{3}{7}, y = -\frac{5}{7} \right)$.

$$\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 5y \\ x = \dfrac{2 + y}{3} \end{cases} \Rightarrow 4 + 5y = \frac{2 + y}{3} \Rightarrow 14y = -10 \Rightarrow y = \frac{-10}{14} = \frac{-5}{7} \Rightarrow x = 4 - 5 \cdot \frac{5}{7} = \frac{3}{7}$$

d) Se resuelve el sistema por el método de sustitución. La solución del sistema es (x = 1 y = –5).

$$\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x + 3y = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 + 2y \\ 2x + 3y = -13 \end{cases} \Rightarrow 2(11 + 2y) + 3y = -13 \Rightarrow 22 + 4y + 3y = -13 \Rightarrow 7y = -35 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow x = 1$$

29. Sin resolver estos sistemas, indica su número de soluciones.

a) $\begin{cases} x - 3y = 15 \\ -\dfrac{x}{3} + y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$

a) La recta x – 3y = 15 se puede escribir como $y = \frac{x}{3} - 5$, cuya pendiente es $\frac{1}{3}$.

La otra recta, $-\frac{x}{3} + y = 5$, se puede escribir como $y = 5 + \frac{x}{3}$ cuya pendiente también es $\frac{1}{3}$.

Las dos rectas tienen la misma pendiente, por lo que o serán paralelas o serán coincidentes.

Como la ordenada en el origen de la primera recta es –5 y la de la segunda, 5, las rectas son paralelas y, por tanto, el sistema no tendrá solución.

b) La recta 5x – 2y = 0 se puede escribir como $y = \frac{5x}{2}$, cuya pendiente es $\frac{5}{2}$.

La otra recta, 3x – 4y = 1, se puede escribir como $y = \frac{3x - 1}{4}$ cuya pendiente es $\frac{3}{4}$.

Las rectas tienen distinta pendiente, por lo que serán secantes y, por tanto, el sistema tendrá una solución.

30. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes.

a) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y = 20 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ 6x - 9y = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 8 \\ 3y = 3x - 5 \end{cases}$

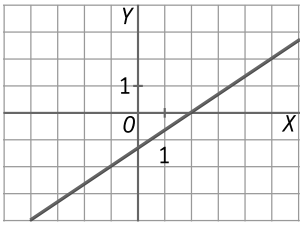
a) Se resuelve el sistema por el método de igualación. La solución del sistema es (x = 2 y = –2).

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 4 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow x - 4 = 2 - 2x \Rightarrow x + 2x = 2 + 4 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2 - 4 = -2$$

b) Se resuelve el sistema por el método de reducción. La solución del sistema es (x = 5 y = 2).

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 2x + 5y = 20 \\ 2x - 5y = \ \ 0 \end{cases} \\ \hline 4x \qquad = 20 \end{array} \Rightarrow x = 5 \Rightarrow 2 \cdot 5 + 5y = 20 \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2$$

c) Se resuelve el sistema por el método gráfico. El sistema tiene infinitas soluciones.



d) Se resuelve el sistema por el método de sustitución. El sistema no tiene solución.

$$\begin{cases} x - y = 8 \\ 3y = 3x - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 + y \\ 3y = 3x - 5 \end{cases} \Rightarrow 3y = 3(8 + y) - 5 \Rightarrow 3y = 24 + 3y - 5 \Rightarrow 0y = 19$$

31. ¿Puede haber dos números que sumen 5 y cuyos dobles sumen 12? Razona tu respuesta.

No existen dos números que sumen 5 y cuyos dobles sumen 12 porque, si dos números suman 5, sus dobles sumarán 10.

32. Si me das 70 monedas tendré el triple de dinero que tú, pero si yo te doy las 70 monedas, entonces tú tendrás el quíntuple que yo. ¿Cuántas monedas tenemos cada uno?

Sea x el número de monedas que tengo yo e y el número de monedas que tienes tú.

$$\begin{cases} x + 70 = 3(y - 70) \\ y + 70 = 5(x - 70) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = -280 \\ 5x - y = 420 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y - 280 \\ 5x - y = 420 \end{cases} \Rightarrow 5(3y - 280) - y = 420 \Rightarrow 15y - 1400 - y = 420 \Rightarrow 14y = 1820$$

$$\Rightarrow y = 130 \Rightarrow x = 3 \cdot 130 - 280 = 110$$

Yo tengo 110 monedas y tú, 130.

33. Resuelve estos sistemas de ecuaciones de segundo grado.

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 25 \\ x + y = 25 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 47 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 - 3y = 7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ y^2 - 2x^2 = 7 \end{cases}$

a) La solución del sistema es (x = 13 y = 12).

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 25 \\ x + y = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 25 \\ x = 25 - y \end{cases} \Rightarrow (25 - y)^2 - y^2 = 25 \Rightarrow 625 + y^2 - 50y - y^2 = 25 \Rightarrow 625 - 25 = 50y \Rightarrow 600 = 50y$$
$$\Rightarrow y = 12 \Rightarrow x = 25 - 12 = 13$$

b) Las soluciones del sistema son (x = –7 y = 14) y (x = 4 y = 3).

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 - 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 7 - x \\ x^2 - 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3(7 - x) = 7 \Rightarrow x^2 + 3x - 28 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 11}{2} = \begin{cases} -7 \Rightarrow y = 14 \\ 4 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

c) Las soluciones del sistema son $\left(x = \frac{-67}{5}, y = \frac{-51}{5}\right)$ y (x = 5 y = –1).

$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 47 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 47 \\ x = 7 + 2y \end{cases} \Rightarrow 2(7 + 2y)^2 - 3y^2 = 47 \Rightarrow 98 + 8y^2 + 56y - 3y^2 = 47 \Rightarrow 5y^2 + 56y + 51 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{-56 \pm 46}{10} = \begin{cases} \frac{-51}{5} \Rightarrow x = \frac{-67}{5} \\ -1 \quad \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

d) Las soluciones del sistema son (x = –3 y = –5) y (x = 1 y = 3).

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ y^2 - 2x^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y^2 - 2x^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow (2x + 1)^2 - 2x^2 = 7 \Rightarrow 4x^2 + 1 + 4x - 2x^2 = 7 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -3 \Rightarrow y = -5 \\ 1 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

34. Resuelve estos sistemas de ecuaciones de segundo grado.

a) $\begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$

a) Las soluciones del sistema son (x = $\frac{5}{4}$ y = $\frac{-11}{4}$) y (x = –1 y = 4).

$$\begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ y = 1 - 3x \end{cases} \Rightarrow x^2 - x(1 - 3x) = 5 \Rightarrow x^2 - x + 3x^2 = 5 \Rightarrow 4x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{8} =$$
$$= \frac{1 \pm 9}{8} = \begin{cases} \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{-11}{4} \\ -1 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

b) Las soluciones del sistema son (x = 2 y = 3) y (x = 3 y = 2).

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x = 5 - y \end{cases} \Rightarrow (5 - y)^2 - (5 - y)y + y^2 = 7 \Rightarrow 25 + y^2 - 10y - 5y + y^2 + y^2 = 7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3y^2 - 15y + 18 = 0 \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \Rightarrow x = 2 \\ 2 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

35. Resuelve el siguiente sistema siguiendo los pasos que se indican $\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{x+y=4}\\ \boldsymbol{x^2+y^2=58}\end{array}\right.$

1º. Eleva al cuadrado la primera ecuación. **2º. Réstale la segunda ecuación.**

$$\left\{\begin{array}{l}x+y=4\\ x^2+y^2=58\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2+y^2+2xy=16\\ x^2+y^2=58\end{array}\right. \Rightarrow 2xy=-42 \Rightarrow xy=-21$$

El sistema se transforma en el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l}x+y=4\\ xy=-21\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=4-y\\ xy=-21\end{array}\right. \Rightarrow (4-y)y=-21 \Rightarrow 4y-y^2=-21 \Rightarrow y^2-4y-21=0 \Rightarrow y=\frac{4\pm 10}{2}=\left\{\begin{array}{l}7\Rightarrow x=-3\\ -3\Rightarrow x=7\end{array}\right.$$

Las soluciones del sistema son (x = –3, y = 7) y (x = 7 y = –3).

36. La diferencia entre el triple de un número entero y la cuarta parte de otro es igual a 6. Además, la suma de los cuadrados de los números es igual a 145. ¿Cuáles son esos números?

Sean x e y los números buscados.

$$\left\{\begin{array}{l}3x-\dfrac{y}{4}=6\\ x^2+y^2=145\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}12x-y=24\\ x^2+y^2=145\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}y=12x-24\\ x^2+y^2=145\end{array}\right. \Rightarrow x^2+(12x-24)^2=145 \Rightarrow x^2+576+144x^2-576x=145 \Rightarrow$$

$$145x^2-576x+431=0 \Rightarrow x=\frac{576\pm 286}{290}=\left\{\begin{array}{l}1\Rightarrow y=-12\\ \dfrac{862}{290}\end{array}\right.$$

Los números son 1 y –12.

37. La suma de las áreas de dos cuadrados es 90 m² y la suma de sus perímetros es 48 m. ¿Qué medida tiene el lado de cada cuadrado?

Sea x la medida del lado de un cuadrado e y la medida del lado de otro.

$$\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=90\\ 4x+4y=48\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=90\\ x+y=12\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=90\\ x=12-y\end{array}\right. \Rightarrow (12-y)^2+y^2=90 \Rightarrow 144+y^2-24y+y^2=90 \Rightarrow 2y^2-24y+54=0$$

$$\Rightarrow y^2-12y+27=0 \Rightarrow y=\frac{12\pm 6}{2}=\left\{\begin{array}{l}9\Rightarrow x=3\\ 3\Rightarrow x=9\end{array}\right.$$

El lado de un cuadrado mide 3 m y, el del otro, 9 m.

38. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 100 cm y su perímetro, 224 cm. ¿Cuánto miden sus catetos?

Sean x e y las medidas de los catetos del triángulo.

$$\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=100^2\\ x+y+100=224\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=100^2\\ x+y=124\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=100^2\\ x=124-y\end{array}\right. \Rightarrow (124-y)^2+y^2=100^2 \Rightarrow 15\,376+y^2-248y+y^2=10\,000$$

$$\Rightarrow 2y^2-248y+5376=0 \Rightarrow y^2-124y+2688=0 \Rightarrow y=\frac{124\pm 68}{2}=\left\{\begin{array}{l}96\Rightarrow y=28\\ 28\Rightarrow x=96\end{array}\right.$$

Uno de los catetos mide 96 m y, el otro, 28 m.

39.

La edad del profesor es $10x + y$.

$$\left\{\begin{array}{l}x+y=10\\ 10x+y+36=10y+x\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x+y=10\\ 9x-9y=-36\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x+y=10\\ \underline{x-y=-4}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}y=7\\ x=3\end{array}\right.$$

$$2y=14$$

El profesor tiene 37 años.

40. Resuelve estos sistemas de ecuaciones exponenciales.

a) $\begin{cases} 3^{x+y} = 3 \\ 3^{x-2y} = 81 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5^{x+y} = 125 \\ 2^{x-2y} = 64 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^{x} - 3^{y-1} = 23 \\ 2^{x+1} - 3^{y+1} = -17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^{x-1} = 3^{y+2} \\ \dfrac{2^{x-1}}{3^{2y+1}} = 3 \end{cases}$

a) La solución del sistema es (x = 2, y = –1).

$$\begin{cases} 3^{x+y} = 3 \\ 3^{x-2y} = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{x} \cdot 3^{y} = 3 \\ \dfrac{3^{x}}{3^{2y}} = 81 \end{cases} \overset{\substack{3^x = t \\ 3^y = s}}{\Rightarrow} \begin{cases} t \cdot s = 3 \\ \dfrac{t}{s^2} = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \cdot s = 3 \\ t = 81s^2 \end{cases} \Rightarrow 81s^3 = 3 \Rightarrow s^3 = \frac{3}{81} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3} = \left(3^{-1}\right)^3 \Rightarrow s = 3^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 3^2 \Rightarrow \begin{cases} 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2 \\ 3^y = 3^{-1} \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

b) La solución del sistema es (x = 4, y = –1).

$$\begin{cases} 5^{x+y} = 125 \\ 2^{x-2y} = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{x+y} = 5^3 \\ 2^{x-2y} = 2^6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ \underline{x - 2y = 6} \end{cases} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = 4$$

$$3y = -3$$

c) La solución del sistema es (x = 5, y = 3).

$$\begin{cases} 2^{x} - 3^{y-1} = 23 \\ 2^{x+1} - 3^{y+1} = -17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x} - \dfrac{3^y}{3} = 23 \\ 2 \cdot 2^x - 3 \cdot 3^y = -17 \end{cases} \overset{\substack{2^x = t \\ 3^y = s}}{\Rightarrow} \begin{cases} t - \dfrac{s}{3} = 23 \\ 2t - 3s = -17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 23 + \dfrac{s}{3} \\ t = \dfrac{3s - 17}{2} \end{cases} \Rightarrow 23 + \frac{s}{3} = \frac{3s-17}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 138 + 2s = 9s - 51 \Rightarrow 189 = 7s \Rightarrow s = 27 \Rightarrow t = 32 \Rightarrow \begin{cases} s = 27 = 3^3 \Rightarrow 3^y = 3^3 \Rightarrow y = 3 \\ t = 32 = 2^5 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

d) La solución del sistema es $\left(x = \dfrac{\log 18}{\log 2}, y = 0\right)$.

$$\begin{cases} 2^{x-1} = 3^{y+2} \\ \dfrac{2^{x-1}}{3^{2y+1}} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 18 \cdot 3^y \\ 2^x = 18 \cdot 3^{2y} \end{cases} \overset{\substack{2^x = t \\ 3^y = s}}{\Rightarrow} \begin{cases} t = 18s \\ t = 18s^2 \end{cases} \Rightarrow 18s^2 = 18s \Rightarrow s = 1 \Rightarrow t = 18 \Rightarrow \begin{cases} s = 1 \Rightarrow 3^y = 1 \Rightarrow y = 0 \\ t = 18 \Rightarrow 2^x = 18 \Rightarrow x = \dfrac{\log 18}{\log 2} \end{cases}$$

41. Resuelve estos dos sistemas logarítmicos.

a) $\begin{cases} x - y = 9 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log(2x-4) + \log y = 2 \\ 4x - y = -9 \end{cases}$

a) La solución del sistema es (x = 10, y = 1).

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 9 \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 9 \\ \dfrac{x}{y} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 9 \\ x = 10y \end{cases} \Rightarrow 10y - y = 9 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 10$$

b) La solución del sistema es (x = 4, y = 25).

$$\begin{cases} \log(2x-4) + \log y = 2 \\ 4x - y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log\left(2x-4\right)y = 2 \\ 4x - y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy - 4y = 100 \\ y = 4x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy - 2y = 50 \\ y = 4x + 9 \end{cases} \Rightarrow x\left(4x+9\right) - 2\left(4x+9\right) = 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 9x - 8x - 18 = 50 \Rightarrow 4x^2 + x - 68 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 33}{8} = \begin{cases} 4 \Rightarrow y = 25 \\ \dfrac{-17}{4} \text{ No es solución.} \end{cases}$$

42. Actividad interactiva.

43. Resuelve estas ecuaciones de primer grado.

a) $-4x + 3 = 7x - 19$

b) $\frac{-3x}{4} + \frac{1}{2} = -5x + 26$

c) $-5(2x - 1) + 3x - 2 = -(6x - 4) + 7$

d) $\frac{4x-3}{5x+1} = \frac{9}{16}$

e) $\frac{x+3}{6} + \frac{2x-1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x-5}{12} - \frac{2}{3}$

a) $-4x + 3 = 7x - 19 \Rightarrow 19 + 3 = 7x + 4x \Rightarrow 22 = 11x \Rightarrow x = 2$

b) $\frac{-3x}{4} + \frac{1}{2} = -5x + 26 \Rightarrow -3x + 2 = -20x + 104 \Rightarrow -3x + 20x = 104 - 2 \Rightarrow 17x = 102 \Rightarrow x = 6$

c) $-5(2x - 1) + 3x - 2 = -(6x - 4) + 7 \Rightarrow -10x + 5 + 3x - 2 = -6x + 4 + 7 \Rightarrow 5 - 2 - 4 - 7 = 10x - 3x - 6x \Rightarrow -8 = x$

d) $\frac{4x-3}{5x+1} = \frac{9}{16} \Rightarrow 64x - 48 = 45x + 9 \Rightarrow 64x - 45x = 9 + 48 \Rightarrow 19x = 57 \Rightarrow x = 3$

e) $\frac{x+3}{6} + \frac{2x-1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x-5}{12} - \frac{2}{3} \Rightarrow 2x + 6 + 8x - 4 + 3 = x - 5 - 8 \Rightarrow 9x = -18 \Rightarrow x = -2$

44. Clasifica en tu cuaderno las siguientes ecuaciones según el número de soluciones distintas que tengan.

a) $5x^2 + 6x + 2 = 0$

b) $-3x^2 + 4x + 5 = 0$

c) $x^2 - 6x + 1 = 0$

d) $x^2 - 5 = 0$

I. Sin solución

II. Una solución

III. Dos soluciones

Se estudia el signo del discriminante: $b^2 - 4ac$.

a) $6^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 36 - 40 = -4 < 0 \Rightarrow$ Sin solución

b) $4^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 = 16 + 60 = 76 > 0 \Rightarrow$ Dos soluciones

c) $6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 36 - 4 = 32 > 0 \Rightarrow$ Dos soluciones

d) $0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 0 + 20 = 2 > 0 \Rightarrow$ Dos soluciones

45. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $6x^2 - 11x + 3 = 0$

b) $-2x^2 + 2x + 24 = 0$

c) $3x^2 + x + 5 = 0$

d) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

a) $6x^2 - 11x + 3 = 0$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121-72}}{12} = \frac{11 \pm 7}{12} = \begin{cases} \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

b) $-2x^2 + 2x + 24 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+192}}{-4} = \frac{-2 \pm 14}{-4} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$

c) $3x^2 + x + 5 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-60}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{-59}}{6} \text{ Sin solución}$$

d) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{-4 \pm 0}{8} = \frac{-1}{2} \text{ (Doble)}$$

46. Actividad resuelta.

47. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado por métodos distintos a la fórmula general.

a) $3x^2 - 27 = 0$ **c)** $-7x^2 + \frac{5}{2}x = 0$

b) $x^2 + 2x + 1 = 0$ **d)** $(x - 2)^2 - 25 = 0$

a) $3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

b) $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$ (Doble)

c) $-7x^2 + \frac{5}{2}x = 0 \Rightarrow x\left(-7x + \frac{5}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{14} \end{cases}$

d) $(x - 2)^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 5 \Rightarrow x = 5 \\ x - 2 = -5 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$

48. Una de las soluciones de la ecuación $x^2 + bx - 14 = 0$ es 2. ¿Cuál es la otra solución de la ecuación?

Como $x = 2$ es una de las soluciones de la ecuación $x^2 + bx - 14 = 0$ es 2, entonces:

$2^2 + 2b - 14 = 0 \Rightarrow 4 + 2b - 14 = 0 \Rightarrow 2b = 10 \Rightarrow b = 5$

La ecuación es $x^2 + 5x - 14 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2} = \begin{cases} 2 \\ -7 \end{cases}$

La otra solución de la ecuación es $x = -7$.

49. Resuelve las siguientes ecuaciones factorizando previamente.

a) $-2x^3 + 4x^2 + 18x - 36 = 0$ **c)** $-3x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 12x = 0$

b) $4x^3 - 24x^2 + 48x - 32 = 0$ **d)** $6x^4 - 5x^3 - 43x^2 + 70x - 24 = 0$

a) $-2x^3 + 4x^2 + 18x - 36 = -2(x^3 - 2x^2 - 9x + 18) = -2(x - 3)(x + 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 3, x = -3$ y $x = 2$

	1	–2	–9	18
3		3	3	–18
	1	1	–6	0

$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

b) $4x^3 - 24x^2 + 48x - 32 = 4(x - 2)(x^2 - 4x + 4) = 4(x - 2)(x - 2)^2 = 4(x - 2)^3 \Rightarrow x = 2$ (triple)

	1	–6	12	–8
2		2	–8	8
	1	–4	4	0

c) $-3x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 12x = -3x(x^3 - x^2 - 4x + 4) = -3x(x - 1)(x^2 - 4) = -3x(x - 1)(x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1,$ $x = 2$ y $x = -2$.

	1	–1	–4	4
1		1	0	–4
	1	0	–4	0

d) $6x^4 - 5x^3 - 43x^2 + 70x - 24 = 6(x-2)(x+3)\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -3, x = \frac{4}{3}$ y $x = \frac{1}{2}$

	6	–5	–43	70	–24
2		12	14	–58	–24
	6	7	–29	12	0
–3		–18	33	–12	
	6	–11	4	0	

$6x^2 - 11x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121-96}}{12} = \frac{11 \pm 5}{12} = \begin{cases} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

50. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $3x^4 - 15x^2 + 12 = 0$

c) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ y $x^2 = z \Rightarrow z^2 - 13z + 36 = 0 \Rightarrow z = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{13+5}{2} = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ z = \frac{13-5}{2} = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$

b) $3x^4 - 15x^2 + 12 = 0$ y $x^2 = z \Rightarrow 3z^2 - 15z + 12 = 0 \Rightarrow z = \frac{15 \pm \sqrt{81}}{6} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{15+9}{6} = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ z = \frac{15-9}{6} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

c) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$ y $x^2 = z \Rightarrow z^2 + 2z - 8 = 0 \Rightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{-2+6}{2} = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ z = \frac{-2-6}{2} = -4 \Rightarrow x^2 = -4 \text{ Sin solución} \end{cases}$

51. Halla las soluciones de estas ecuaciones de primer grado.

a) $\frac{x-4}{5} - 4(-2x+1) - \frac{(-4x+2)}{10} = 2(x-3) + \frac{5x+6}{2}$

b) $3(2x-5) + 8x - 6 = \frac{x}{2} - (5x+3)$

c) $\frac{3(x+3)}{2} - 2(2-3x) = 8x - 1 - 2(x+3)$

d) $\frac{6-2(x-3)}{7x} = -\frac{8}{4}$

e) $\frac{3(x-2)}{5} + 2(-3x+1) - \frac{2}{5} = \frac{-4x+3}{15} + \frac{16}{3}$

a) $\frac{x-4}{5} - 4(-2x+1) - \frac{(-4x+2)}{10} = 2(x-3) + \frac{5x+6}{2} \Rightarrow \frac{x-4}{5} + 8x - 4 - \frac{-4x+2}{10} = 2x - 6 + \frac{5x+6}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - 8 + 80x - 40 + 4x - 2 = 20x - 60 + 25x + 30 \Rightarrow 41x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{41}$

b) $3(2x-5) + 8x - 6 = \frac{x}{2} - (5x+3) \Rightarrow 6x - 15 + 8x - 6 = \frac{x}{2} - 5x - 3 \Rightarrow 12x - 30 + 16x - 12 = x - 10x - 6 \Rightarrow x = \frac{36}{37}$

c) $\frac{3(x+3)}{2} - 2(2-3x) = 8x - 1 - 2(x+3) \Rightarrow 3x + 9 - 8 + 12x = 16x - 2 - 4x - 12 \Rightarrow 3x = -15 \Rightarrow x = -5$

d) $\frac{6-2(x-3)}{7x} = -\frac{8}{4} \Rightarrow 6 - 2x + 6 = -14x \Rightarrow 12x = -12 \Rightarrow x = -1$

e) $\frac{3(x-2)}{5} + 2(-3x+1) - \frac{2}{5} = \frac{-4x+3}{15} + \frac{16}{3} \Rightarrow 9x - 18 - 90x + 30 - 6 = -4x + 3 + 80 \Rightarrow x = -1$

52. Resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

a) $\frac{3x^2}{2}-\frac{4x-1}{4}=\frac{2x(x-3)}{6}+\frac{17}{12}$

b) $3x^2-4x+5(x^2-2)=\frac{3x(x-2)}{2}+14$

c) $6x^2-1+\frac{2x(-x+3)}{3}=\frac{5x^2-2}{6}-4x^2+\frac{59}{6}$

d) $\frac{3(-x+2)}{5}+4x\left(\frac{-2x+1}{3}\right)=x(-3x+1)-\frac{1}{2}$

e) $\frac{3x-1}{5}=\frac{13}{4x+5}$

a) $\frac{3x^2}{2}-\frac{4x-1}{4}=\frac{2x(x-3)}{6}+\frac{17}{12} \Rightarrow 18x^2-12x+3=4x^2-12x+17 \Rightarrow 14x^2=14 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

b) $3x^2-4x+5(x^2-2)=\frac{3x(x-2)}{2}+14 \Rightarrow 6x^2-8x+10x^2-20=3x^2-6x+28 \Rightarrow 13x^2-2x-48=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+2496}}{26}=\frac{2\pm 50}{26}=\begin{cases}2\\ \frac{-48}{26}=\frac{-24}{13}\end{cases}$

c) $6x^2-1+\frac{2x(-x+3)}{3}=\frac{5x^2-2}{6}-4x^2+\frac{59}{6} \Rightarrow 36x^2-6-4x^2+12x=5x^2-2-24x^2+59=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 17x^2+4x-21=0 \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{1428}}{2\cdot 17}=\frac{-4\pm 38}{34}=\begin{cases}1\\ \frac{-42}{34}=\frac{-21}{17}\end{cases}$

d) $\frac{3(-x+2)}{5}+4x\left(\frac{-2x+1}{3}\right)=x(-3x+1)-\frac{1}{2} \Rightarrow 18x+36-80x^2+40x=-90x^2+30x-15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x^2+28x+51=0 \Rightarrow x=\frac{-28\pm\sqrt{-1256}}{20}$ No tiene solución.

e) $\frac{3x-1}{5}=\frac{13}{4x+5} \Rightarrow 12x^2-4x+15x-5=65 \Rightarrow 12x^2+11x-70=0 \Rightarrow x=\frac{-11\pm\sqrt{121+3360}}{24}=\frac{-11\pm 59}{24}\begin{cases}\frac{-70}{24}=\frac{-35}{12}\\ 2\end{cases}$

53. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones aplicando un cambio de variable.

a) $x^6-2x^3+1=0$

b) $x^{10}-31x^5-32=0$

a) $x^6-2x^3+1=0$ y $x^3=z \Rightarrow z^2-2z+1=0 \Rightarrow z=\frac{2\pm\sqrt{0}}{2}=1 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=1$

b) $x^{10}-31x^5-32=0$ y $x^5=z \Rightarrow z^2-31z-32=0 \Rightarrow z=\frac{31\pm\sqrt{1089}}{2} \Rightarrow \begin{cases} z=\frac{31+33}{2}=32 \Rightarrow x^5=32 \Rightarrow x=2\\ z=\frac{31-33}{2}=-1 \Rightarrow x^5=-1 \Rightarrow x=-1\end{cases}$

54. Comprueba que en las ecuaciones de segundo grado de la forma $x^2+bx+c=0$, que tienen dos soluciones, *b* es la suma de las soluciones cambiada de signo y *c* es el producto de las soluciones. A continuación resuelve mentalmente:

a) $x^2-7x+12=0$ **b)** $x^2+3x-10=0$

Sean A y B las dos soluciones de la ecuación $x^2+bx+c=0$.

Podemos escribir la ecuación de la forma $(x-A)(x-B)=0$. Multiplicando se obtiene $x^2-(A+B)x+AB=0$.

Igualando coeficientes de las ecuaciones $x^2+bx+c=0$ y $x^2-(A+B)x+AB=0$, se obtiene:

$$b=-(A+B) \text{ y } c=AB$$

a) $x^2-7x+12=0$: soluciones: $x=4$ y $x=3$

b) $x^2+3x-10=0$: soluciones: $x=-5$ y $x=2$

55. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{6}{x+3}=\dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{x+1}{3x-2}+\dfrac{2x+1}{x+5}=\dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{4x+2}{x^2+2x+1}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{x+5}{x+1}$

d) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{6}{x+4}=\dfrac{-2}{4x-8}$

a) $\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{6}{x+3}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{12(x+3)-18(x-2)}{3(x-2)(x+3)}=\dfrac{(x-2)(x+3)}{3(x-2)(x+3)}\Rightarrow 12x+36-18x+36=x^2+x-6\Rightarrow x^2+7x-78$

$=0\Rightarrow x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+312}}{22}=\dfrac{-7\pm 19}{2}=\begin{cases}6\\-13\end{cases}$

b) $\dfrac{x+1}{3x-2}+\dfrac{2x+1}{x+5}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\dfrac{2(x+1)(x+5)+2(2x+1)(3x-2)}{2(3x-2)(x+5)}=\dfrac{3(3x-2)(x+5)}{2(3x-2)(x+5)}\Rightarrow 2x^2+12x+10+12x^2-2x-4=$

$9x^2+39x-30\Rightarrow 5x^2-29x+36=0\Rightarrow x=\dfrac{29\pm\sqrt{841-720}}{10}=\dfrac{29\pm 11}{10}=\begin{cases}4\\\dfrac{18}{10}=\dfrac{9}{5}\end{cases}$

c) $\dfrac{4x+2}{x^2+2x+1}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{x+5}{x+1}\Rightarrow\dfrac{2(4x+2)}{2(x+1)^2}+\dfrac{3(x+1)^2}{2(x+1)^2}=\dfrac{2(x+5)(x+1)}{2(x+1)^2}\Rightarrow 8x+4+3x^2+6x+3=2x^2+12x+10\Rightarrow$

$x^2+2x-3=0\Rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2\cdot 1}=\dfrac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases}1\\-3\end{cases}$

d) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{6}{x+4}=\dfrac{-2}{4x-8}\Rightarrow\dfrac{6(x+4)(x-2)-12(x+1)(x-2)}{2(x+1)(x+4)(x-2)}=\dfrac{-(x+1)(x+4)}{2(x+1)(x+4)(x-2)}\Rightarrow 6x^2+12x-48-12x^2+12x+$

$24=-x^2-5x-4\Rightarrow 5x^2-29x+20=0\Rightarrow x=\dfrac{29\pm\sqrt{841-400}}{2\cdot 5}=\dfrac{29\pm 21}{10}=\begin{cases}5\\\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}\end{cases}$

56. Resuelve las ecuaciones con radicales siguientes.

a) $x-\sqrt{x}-6=0$

b) $\sqrt{8-x}=2-x$

a) $x-\sqrt{x}-6=0\Rightarrow(x-6)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2\Rightarrow x^2-12x+36=x\Rightarrow x^2-13x+36=0\Rightarrow x=\dfrac{13\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\dfrac{13\pm 5}{2}=\begin{cases}4\\9\end{cases}$

- $4-\sqrt{4}-6\neq 0\Rightarrow x=4$ no es solución.
- $9-\sqrt{9}-6=0\Rightarrow\Rightarrow x=9$ es solución.

b) $\sqrt{8-x}=2-x\Rightarrow 8-x=4+x^2-4x\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{2\cdot 1}=\dfrac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}4\\-1\end{cases}$

- $\sqrt{8-4}\neq 2-4\Rightarrow x=4$ no es solución.
- $\sqrt{8+1}=2+1\Rightarrow x=-1$ es solución.

57. Resuelve, en función de *a* y *b*, esta ecuación: $\dfrac{b}{x-a}+\dfrac{a}{x-b}=2$

$\dfrac{b}{x-a}+\dfrac{a}{x-b}=2\Rightarrow\dfrac{b(x-b)}{(x-a)(x-b)}+\dfrac{a(x-a)}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{2(x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)}\Rightarrow bx-b^2+ax-a^2=2x^2-2xb-2ax+2ab\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2-3x(b+a)+(a+b)^2\Rightarrow x=\dfrac{3(b+a)\pm\sqrt{9(a+b)^2-8(a+b)^2}}{4}=\dfrac{3(b+a)\pm(a+b)}{4}=\begin{cases}\dfrac{3(b+a)+(a+b)}{4}=a+b\\\dfrac{3(b+a)-(a+b)}{4}=\dfrac{a+b}{2}\end{cases}$

58. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $2\sqrt{x-1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$

b) $\sqrt{7x+1}=2\sqrt{x+4}$

c) $\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}=1$

d) $\sqrt{5x+1}-2=\sqrt{x+1}$

a) $2\sqrt{x-1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \dfrac{2\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{5\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow 2x-2-5\sqrt{x-1}=3 \Rightarrow -5\sqrt{x-1}=-2x+5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25(x-1)=4x^2-20x+25 \Rightarrow 25x-25=4x^2-20x+25 \Rightarrow 4x^2-45x+50=0 \Rightarrow x=\dfrac{45\pm 35}{8}=\begin{cases}10\\ \dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4}\end{cases}$

- $2\sqrt{10-1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{10-1}} \Rightarrow x=10$ es solución.
- $2\sqrt{\dfrac{5}{4}-1}-5\neq\dfrac{3}{\sqrt{\dfrac{5}{4}-1}} \Rightarrow x=\dfrac{5}{4}$ no es solución.

b) $\sqrt{7x+1}=2\sqrt{x+4} \Rightarrow \left(\sqrt{7x+1}\right)^2=\left(2\sqrt{x+4}\right)^2 \Rightarrow 7x+1=4(x+4) \Rightarrow 7x+1=4x+16 \Rightarrow 3x=15 \Rightarrow x=5$

- $\sqrt{7\cdot 5+1}=2\sqrt{5+4} \Rightarrow x=5$ es solución.

c) $\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}=1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Rightarrow x-2=\sqrt{x} \Rightarrow (x-2)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow \Rightarrow x=\dfrac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4\\1\end{cases}$

- $\sqrt{4}-\dfrac{2}{\sqrt{4}}=1 \Rightarrow x=4$ es solución.
- $\sqrt{1}-\dfrac{2}{\sqrt{1}}\neq 1 \Rightarrow x=1$ no es solución.

d) $\sqrt{5x+1}-2=\sqrt{x+1} \Rightarrow \left(\sqrt{5x+1}-2\right)^2=\left(\sqrt{x+1}\right)^2 \Rightarrow 5x+1-4\sqrt{5x+1}+4=x+1 \Rightarrow 4x+4=4\sqrt{5x+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x+1=\sqrt{5x+1} \Rightarrow x^2+2x+1=5x+1 \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x=0$ y $x=3$.

- $\sqrt{0+1}-2\neq\sqrt{1} \Rightarrow x=0$ no es solución.
- $\sqrt{15+1}-2=\sqrt{3+1} \Rightarrow x=3$ es solución.

59. Actividad resuelta.

60. Se define en el conjunto de los números reales la siguiente operación: $a\nabla b=\sqrt{a+3}+\sqrt{b-7}$.

Resuelve la ecuación $(x+2)\nabla(x-8)=10$.

$(x+2)\nabla(x-8)=10 \Rightarrow \sqrt{x+2+3}+\sqrt{x-8-7}=10 \Rightarrow \sqrt{x+5}+\sqrt{x-15}=10 \Rightarrow \sqrt{x+5}=10-\sqrt{x-15} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x+5}\right)^2=\left(10-\sqrt{x-15}\right)^2 \Rightarrow x+5=100+x-15+20\sqrt{x-15} \Rightarrow -4=\sqrt{x-15} \Rightarrow 16=x-15 \Rightarrow x=31$

61. Actividad resuelta.

62. Resuelve las ecuaciones de tipo logarítmico siguientes.

a) $\log_x \dfrac{\sqrt[5]{8}}{2}=-0{,}4$

b) $\log_9 \sqrt[5]{27}=2x-1$

a) $\log_x \dfrac{\sqrt[5]{8}}{2}=-0.4 \Rightarrow \dfrac{\sqrt[5]{8}}{2}=x^{-0.4} \Rightarrow 2^{\frac{3}{5}-1}=x^{-0.4} \Rightarrow 2^{\frac{-2}{5}}=x^{-0.4} \Rightarrow 2^{-0,4}=x^{-0.4} \Rightarrow x=2$

b) $\log_9 \sqrt[5]{27}=2x-1 \Rightarrow 9^{2x-1}=\sqrt[5]{27} \Rightarrow 3^{4x-2}=3^{\frac{3}{5}} \Rightarrow 4x-2=\dfrac{3}{5} \Rightarrow 20x-10=3 \Rightarrow 20x=13 \Rightarrow x=\dfrac{13}{20}$

63. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $\log(x-1)+\log(x+1)=3\log 2+\log(x-2)$

b) $\log(x-2)-\frac{1}{2}\log(3x-6)=\log 2$

c) $\log_7(x-2)-\log_7(x+2)=1-\log_7(2x-7)$

d) $\ln(x-1)+\ln x^2=\ln(x^3-3x^2-8)$

e) $\frac{\ln(x-1)+\ln(3x)}{2}=\ln\left(2x-\frac{1}{2}\right)$

a) $\log(x-1)+\log(x+1)=3\log 2+\log(x-2)\Rightarrow \log[(x-1)\cdot(x+1)]=\log[2^3\cdot(x-2)]\Rightarrow x^2-1=8x-16\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-8x+15=0\Rightarrow x=\frac{8\pm 2}{2}=\begin{cases}5\\3\end{cases}$

- $\log 4+\log 6=3\log 2+\log 3\Rightarrow x=5$ es solución.
- og $2+\log 4=3\log 2+\log 1\Rightarrow x=3$ es solución.

b) $\log(x-2)-\frac{1}{2}\log(3x-6)=\log 2\Rightarrow\log\frac{(x-2)^2}{3x-6}=\log 2^2\Rightarrow\frac{(x-2)^2}{3x-6}=4\Rightarrow x^2-16x+28=0\Rightarrow x=\frac{16\pm 12}{2}=\begin{cases}14\\2\end{cases}$

- $\log 12-\frac{1}{2}\log 36=\log 2\Rightarrow x=14$ es solución.
- $\log(2-2)$ no existe $\Rightarrow x=2$ no es solución.

c) $\log_7(x-2)-\log_7(x+2)=1-\log_7(2x-7)\Rightarrow\log_7(x-2)-\log_7(x+2)=\log_7 7-\log_7(2x-7)\Rightarrow$ $\frac{x-2}{x+2}=\frac{7}{2x-7}\Rightarrow(x-2)(2x-7)=7(x+2)\Rightarrow 2x^2-11x+14=7x+14\Rightarrow 2x^2-18x=0\Rightarrow 2x(x-9)=0\Rightarrow x=9$ y $x=0$

- $\log_7 7-\log_7 11=1-\log_7 11\Rightarrow x=9$ es solución.
- $\log_7 0$ no existe $\Rightarrow x=0$ no es solución.

d) $\ln(x-1)+\ln x^2=\ln(x^3-3x^2-8)\Rightarrow\ln(x^3-\cdot x^2)=\ln(x^3-3x^2-8)\Rightarrow x^3-\cdot x^2=x^3-3x^2-8\Rightarrow x^2=-4$ Sin solución

e) $\frac{\ln(x-1)+\ln(3x)}{2}=\ln\left(2x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\ln(3x^2-3x)=\ln\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow 3x^2-3x=\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow 3x^2-3x=4x^2-2x+\frac{1}{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2+4x+1=0\Rightarrow(2x+1)^2=0\Rightarrow x=\frac{-1}{2}\Rightarrow$ No es solución.

64. Resuelve las siguientes ecuaciones de tipo exponencial.

a) $6^{3-x}=216$

b) $5^{2x-3}=\frac{1}{25}$

c) $2^{5x-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$

d) $3^{2x-7}\cdot 27=3^{5x}$

e) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

f) $3^x\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}=\left(\frac{1}{27}\right)^x$

g) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3-5x}=\left(\frac{25}{4}\right)^{3x-1}$

h) $2^3\cdot 2^{x-5}=0{,}25$

a) $6^{3-x}=216\Rightarrow 6^{3-x}=6^3\Rightarrow 3-x=3\Rightarrow x=0$

b) $5^{2x-3}=\frac{1}{25}\Rightarrow 5^{2x-3}=5^{-2}\Rightarrow 2x-3=-2\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

c) $2^{5x-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}\Rightarrow 2^{5x-3}=2^{x-2}\Rightarrow 5x-3=x-2\Rightarrow x=\frac{1}{4}$

d) $3^{2x-7}\cdot 27=3^{5x}\Rightarrow 3^{2x-7}\cdot 3^3=3^{5x}\Rightarrow 2x-7+3=5x\Rightarrow x=\frac{-4}{3}$

e) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}\Rightarrow\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3}\Rightarrow 3x-7=-7x+3\Rightarrow 10x=10\Rightarrow x=1$

f) $3^x\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}=\left(\frac{1}{27}\right)^x\Rightarrow 3^x\cdot 3^{3-x}=3^{-3x}\Rightarrow x+3-x=-3x\Rightarrow x=-1$

g) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3-5x}=\left(\frac{25}{4}\right)^{3x-1}\Rightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^{3-5x}=\left(\frac{5}{2}\right)^{2(3x-1)}\Rightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^{5x-3}=\left(\frac{5}{2}\right)^{2(3x-1)}\Rightarrow 5x-3=2(3x-1)\Rightarrow 5x-3=6x-2\Rightarrow x=-1$

h) $2^3\cdot 2^{x-5}=0{,}25\Rightarrow 2^{x-2}=2^{-2}\Rightarrow x-2=-2\Rightarrow x=0$

65. Actividad resuelta.

66. Resuelve las siguientes ecuaciones de tipo exponencial.

a) $3 \cdot 4^{x+3} - 4^{x+1} + 4^{x+2} = 62$ **b)** $13^{2x} - 6 \cdot 13^{x} + 5 = 0$ **c)** $10^{x} - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$

a) $3 \cdot 4^{x+3} - 4^{x+1} + 4^{x+2} = 62 \Rightarrow 192 \cdot 4^x - 4 \cdot 4^x + 16 \cdot 4^x = 62 \Rightarrow 96 \cdot 4^x - 2 \cdot 4^x + 8 \cdot 4^x = 31 \Rightarrow 102 \cdot 4^x = 31 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4^x = \frac{31}{102} \Rightarrow \log 4^x = \log \frac{31}{102} \Rightarrow x \log 4 = \log \frac{31}{102} \Rightarrow x = -0{,}86$

b) $13^{2x} - 6 \cdot 13^x + 5 = 0$ y $13^x = z \Rightarrow z^2 - 6z + 5 = 0 \Rightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \Rightarrow 13^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ 5 \Rightarrow 13^x = 5 \Rightarrow x = 0{,}63 \end{cases}$

c) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950 \Rightarrow 100 \cdot 10^{x-2} - 5 \cdot 10^{x-2} = 950 \Rightarrow 95 \cdot 10^{x-2} = 950 \Rightarrow 10^{x-2} = 10 \Rightarrow x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$

67. ¿Qué relación debe existir entre *A* y *B* para que se cumpla la relación log *A* + log *B* = log (*A* + *B*).

$\log A + \log B = \log (A + B) \Rightarrow \log (AB) = \log (A + B) \Rightarrow AB = A + B \Rightarrow AB - A = B \Rightarrow A(B - 1) = B \Rightarrow A = \frac{B}{B-1}$

68. Despeja *m* en la siguiente igualdad. log *m* = *a* – *b* log *c*.

$\log m = a - b\log c \Rightarrow \log m + b\log c = a \Rightarrow \log m + \log c^b = a \Rightarrow \log (mc^b) = a \Rightarrow mc^b = 10^a \Rightarrow m = \frac{10^a}{c^b}$

69. Resuelve estas ecuaciones exponenciales.

a) $2^{x-1} + 2^{x+2} = 72$ **b)** $\sqrt[3]{128} = 4^{2x}$

a) $2^{x-1} + 2^{x+2} = 72 \Rightarrow 2^{x-1} + 8 \cdot 2^{x-1} = 72 \Rightarrow 9 \cdot 2^{x-1} = 72 \Rightarrow 2^{x-1} = 8 \Rightarrow 2^{x-1} = 2^3 \Rightarrow x = 4$

b) $\sqrt[3]{128} = 4^{2x} \Rightarrow 2^{\frac{7}{3}} = 2^{4x} \Rightarrow \frac{7}{3} = 4x \Rightarrow x = \frac{7}{12}$

70. Halla la solución de los siguientes sistemas lineales.

a) $\begin{cases} \mathbf{4x - y = 2} \\ \mathbf{x + 3y = 7} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{3x - 7y = 1} \\ \mathbf{-5x + 8y = 9} \end{cases}$

a) Se resuelve el sistema por el método de sustitución. La solución del sistema es ($x = 1$ $y = 2$).

$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - y = 2 \\ x = 7 - 3y \end{cases} \Rightarrow 4(7 - 3y) - y = 2 \Rightarrow 28 - 12y - y = 2 \Rightarrow 26 = 13y \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$

b) Se resuelve el sistema por el método de reducción. La solución del sistema es $\left(x = \frac{-71}{11}, y = \frac{-32}{11} \right)$.

$\begin{cases} 3x - 7y = 1 \\ -5x + 8y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x - 35y = 5 \\ \underline{-15x + 24y = 27} \\ -11y = 32 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-32}{11} \Rightarrow 3x - 7 \cdot \left(\frac{-32}{11} \right) = 1 \Rightarrow x = \frac{-71}{11}$

71. Añade una ecuación a 3*x* – 2*y* = 5 para formar un sistema:

a) Que no tenga solución.

b) Que tenga infinitas soluciones.

c) Que tenga una única solución. ¿Puede ser esta solución (*x* = 3, *y* = 1)? ¿Y podría ser (*x* = 7, *y* = 8)?

Sea $ax + by = c$ la ecuación que se añade a $3x - 2y = 5$ para formar un sistema.

a) La ecuación $ax + by = c$ debe cumplir que $\frac{a}{3} = \frac{b}{-2} \neq \frac{c}{5}$. Por ejemplo, $3x - 2y = 9$.

b) La ecuación $ax + by = c$ debe cumplir que $\frac{a}{3} = \frac{b}{-2} = \frac{c}{5}$. Por ejemplo, $6x - 4y = 10$.

c) ($x = 3$, $y = 1$) no será solución del sistema porque no satisface la ecuación $3x - 2y = 5$.

($x = 7$, $y = 8$) satisface $3x - 2y = 5$. Por tanto, será solución si satisface $3x - 2y = 5$. Es decir, si $7a + 8b = c$.

72. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{2y}{3} = 6 \\ \frac{-x}{10} + \frac{5y}{6} = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(-2x+1) - 4y = 1 \\ 4x - 2(3y+1) = 8 \end{cases}$

a) Se resuelve el sistema por el método de reducción. La solución del sistema es (x = 10 y = –6).

$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{2y}{3} = 6 \\ \frac{-x}{10} + \frac{5y}{6} = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 10y = 90 \\ \underline{-3x + 25y = -180} \end{cases} \atop 15y = -90 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow 3x - 10 \cdot (-6) = 90 \Rightarrow x = 10$$

b) Se resuelve el sistema por el método de sustitución. La solución del sistema es (x = 5 y = 4).

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ 8x + 15y = 100 \end{cases} \Rightarrow 8(1+y) + 15y = 100 \Rightarrow 8 + 8y + 15y = 100 \Rightarrow 23y = 92 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 5$$

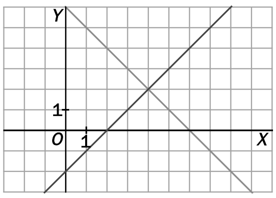
c) Se resuelve el sistema por el método de reducción. La solución del sistema es (x = 6 y = 4).

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ \underline{2x + 3y = 24} \end{cases} \atop 4x \quad = 24 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow 2 \cdot 6 - 3y = 0 \Rightarrow y = 4$$

d) Se resuelve el sistema por el método de igualación. La solución del sistema es (x = 1 y = –1).

$$\begin{cases} 3(-2x+1) - 4y = 1 \\ 4x - 2(3y+1) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 2 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 1 \xrightarrow{\cdot 3} \\ 2x - 3y = 5 \xrightarrow{\cdot 2} \end{cases} \begin{cases} 9x + 6y = 3 \\ \underline{4x - 6y = 10} \end{cases} \atop 13x \quad = 13 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 2y = 1 \Rightarrow y = -1$$

73. Observa la siguiente gráfica.



a) ¿Qué sistema representan las rectas?

b) ¿Cuál es la solución de dicho sistema?

a) $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 6 - x \end{cases}$

b) La solución es (x = 4, y = 2).

74. Actividad resuelta.

75. Estudia el número de soluciones de estos sistemas sin resolverlos.

a) $\begin{cases} -6x + 2y = 10 \\ 3x - y = -5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ \frac{3}{2}x + y = 4 \end{cases}$

a) La recta $-6x + 2y = 10$ se puede escribir como $y = \frac{6x+10}{2}$, cuya pendiente es $\frac{6}{2} = 3$.

La otra recta, $3x - y = -5$, se puede escribir como $y = 3x + 5$ cuya pendiente también es 3.

Las dos rectas tienen la misma pendiente, por lo que o serán paralelas o serán coincidentes.

Como la ordenada en el origen de la primera recta es $\frac{10}{2} = 5$ y, la de la segunda 5, entonces las rectas son coincidentes y, por tanto, el sistema tendrá infinitas soluciones.

b) La recta $2x + y = 1$ se puede escribir como $y = -2x + 1$, cuya pendiente es -2.

La recta $x + 2y = 4$ se puede escribir como $y = \frac{-x+4}{2}$, cuya pendiente es $\frac{1}{2}$.

Las rectas tienen distinta pendiente, por lo que serán secantes y, por tanto, el sistema tendrá una solución.

c) La recta $3x + 2y = 2$ se puede escribir como $y = \frac{-3x+2}{2}$, cuya pendiente es $\frac{-3}{2}$.

La otra recta, $\frac{3}{2}x + y = 4$, se puede escribir como $y = -\frac{3}{2}x + 4$ cuya pendiente también es $\frac{-3}{2}$.

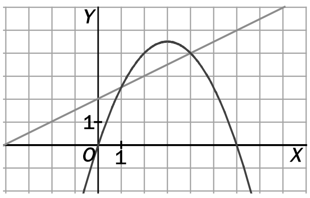
Las dos rectas tienen la misma pendiente, por lo que o serán paralelas o serán coincidentes.

Como la ordenada en el origen de la primera recta es 1, y la de la segunda, 4, entonces son paralelas y, por tanto, el sistema no tendrá solución.

76. Calcula el valor de la *x* en el sistema, si *a*, *b*, *c*, *d*, *p* y *q* son números cualesquiera. $\left.\begin{matrix} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{matrix}\right\}$

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{p - ax}{b} \\ y = \dfrac{q - cx}{d} \end{cases} \Rightarrow \frac{p - ax}{b} = \frac{q - cx}{d} \Rightarrow pd - adx = qb - bcx \Rightarrow x(bc - ad) = qb - pd \Rightarrow x = \frac{qb - pd}{bc - ad}$$

77. Se ha representado la gráfica de una recta y la de la parábola $y = \frac{-x^2 + 6x}{2}$. ¿Qué sistema representan? Resuelve analíticamente dicho sistema.



$$\begin{cases} y = \dfrac{-x^2 + 6x}{2} \\ y = \dfrac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{-x^2 + 6x}{2} = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \Rightarrow y = 4 \\ x = 1 \Rightarrow y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

78. Actividad resuelta.

79. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.

a) $\begin{cases} 3x^2+y^2=12 \\ xy=-3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=61 \\ x\cdot y=12 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 5x^2+y^2=25 \\ 3x^2-y^2=-25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x-y)^2=49 \\ x^2+2xy+y^2=9 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2-2y^2=46 \\ xy=84 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} (x-y)^2=1 \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$

a) Las soluciones del sistema son $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$, (x = 1, y = –3) y (x = –1, y = 3).

$$\begin{cases} 3x^2+y^2=12 \\ xy=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2+y^2=12 \\ y=\dfrac{-3}{x} \end{cases} \Rightarrow 3x^2+\left(\dfrac{-3}{x}\right)^2=12 \Rightarrow 3x^2+\dfrac{9}{x^2}=12 \Rightarrow 3x^4-12x^2+9=0 \Rightarrow x^4-4x^2+3=0$$

$$\Rightarrow x^4-4x^2+3=0 \text{ y } x^2=z \Rightarrow z^2-4z+3=0 \Rightarrow z=\dfrac{4\pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} z=3 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \\ z=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

Si $x=\sqrt{3} \Rightarrow y=\dfrac{-3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$; si $x=-\sqrt{3} \Rightarrow y=\dfrac{-3}{-\sqrt{3}}=\sqrt{3}$; si $x=1 \Rightarrow y=-3$; si $x=-1 \Rightarrow y=3$

b) Las soluciones del sistema son (x = 5, y = –2), (x = 2, y = –5), (x = –2, y = 5) y (x = –5, y = 2).

$$\begin{cases} (x-y)^2=49 \\ x^2+2xy+y^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2=49 \\ (x+y)^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=\pm 7 \\ x+y=\pm 3 \end{cases}$$

Quedan cuatro posibles sistemas:

- $\begin{cases} x-y=7 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x-y=7 \\ x+y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$
- $\begin{cases} x-y=-7 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$
- $\begin{cases} x-y=-7 \\ x+y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=2 \end{cases}$

c) Las soluciones del sistema son (x = 3, y = 4), (x = –3, y = –4), (x = 4, y = 3) y (x = –4, y = –3).

$$\begin{cases} x^2+3xy+y^2=61 \\ x\cdot y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+3xy+y^2=61 \\ x=\dfrac{12}{y} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{144}{y^2}+36+y^2=61 \Rightarrow y^4-25y^2+144=0$$

$$\Rightarrow y^4-25y^2+144=0 \text{ e } y^2=z \Rightarrow z^2-25z+144=0 \Rightarrow z=\dfrac{25\pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} z=16 \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow y=\pm 4 \\ z=9 \Rightarrow y^2=9 \Rightarrow y=\pm 3 \end{cases}$$

Si $y=4 \Rightarrow x=3$; si $y=-4 \Rightarrow x=-3$; si $y=3 \Rightarrow x=4$; si $y=-3 \Rightarrow x=-4$

d) Las soluciones del sistema son (x = 7, y = 12) y (x = –7, y = –12).

$$\begin{cases} x^2-2y^2=46 \\ xy=84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2y^2=46 \\ x=\dfrac{84}{y} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{7056}{y^2}-2y^2=46 \Rightarrow 7056-2y^4=46y^2 \Rightarrow y^4+23y^2-3528=0$$

$$\Rightarrow y^4+23y^2-3528=0 \text{ e } y^2=z \Rightarrow z^2+23z-3528=0 \Rightarrow z=\dfrac{-23\pm 121}{2} \Rightarrow \begin{cases} 49 \Rightarrow y^2=49 \Rightarrow y=\pm 7 \\ -72 \Rightarrow y^2=-72 \text{ Sin solución} \end{cases}$$

Si $y=7 \Rightarrow x=12$; si $y=-7 \Rightarrow x=-12$.

e) Las soluciones del sistema son (x = 0, y = 0) y (x = 0, y = –5).

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 5x^2+y^2=25 \\ 3x^2-y^2=-25 \end{cases} \Rightarrow x=0 \Rightarrow y^2=25 \Rightarrow y=\pm 5 \\ \hline 8x^2 \qquad =0 \end{array}$$

f) Las soluciones del sistema son (x = 4, y = 3) y (x = –4, y = –3).

$$\begin{cases} (x-y)^2=1 \\ x^2-y^2=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)=\pm 1 \\ (x-y)(x+y)=7 \end{cases}.$$

Quedan dos posibles sistemas:

- $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$
- $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$

80. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicos.

a) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2\log x + \log y = 5 \\ \log (xy) = 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5^{x+2} - 4^y = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - 6y = 1 \end{cases}$

a) La solución del sistema es (x = 2, y = 1).

$$\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 4 \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 41 \end{cases} \overset{\substack{2^x = t \\ 5^y = s}}{\Rightarrow} \begin{cases} t + s = 9 \\ 4t + 5s = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 9 - s \\ 4t + 5s = 41 \end{cases} \Rightarrow s = 5 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ 5^y = 5 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

b) La solución del sistema es (x = 10, y = 1000).

$$\begin{cases} 2\log x + \log y = 5 \\ \log (xy) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log\left(x^2y\right) = 5 \\ \log\left(xy\right) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2y = 10^5 \\ xy = 10^4 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2y}{xy} = \frac{10^5}{10^4} \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = 10^3 = 1000$$

c) El sistema no tiene solución.

$$\begin{cases} 5^{x+2} - 4^y = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25 \cdot 5^x - 4^y = -3 \\ 15 \cdot 5^x - \dfrac{4^y}{16} = -1 \end{cases} \overset{\substack{5^x = t \\ 4^y = s}}{\Rightarrow} \begin{cases} 25t - s = -3 \\ 15t - \dfrac{s}{16} = -1 \end{cases} \Rightarrow 240t + 16 = 25t + 3 \Rightarrow t = \frac{-13}{215} \Rightarrow 5^x = \frac{-13}{215}$$ Sin solución.

d) La solución del sistema es (x = 25, y = 4).

$$\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log\left(xy\right) = 2 \\ x = 1 + 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 10^2 \\ x = 1 + 6y \end{cases} \Rightarrow \left(1 + 6y\right)y = 100 \Rightarrow 6y^2 + y - 100 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2400}}{12} =$$

$$= \begin{cases} 4 \\ \dfrac{-50}{12} \end{cases} \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 25$$

81. El cuadrado siguiente es mágico porque sus filas, sus columnas y sus diagonales suman lo mismo.

3*x* + 1	**5*x***	**11 – *x***
a	**2*x* + 5**	***d***
b	***x* + 4**	***c***

¿Qué número representa la letra *d*?

1ª fila = 2ª columna $\Rightarrow$ 3x + 1 + 5x + 11 – x = 5x + 2x + 5 + x + 4 $\Rightarrow$ x = 3

1ª diagonal = 1ª fila $\Rightarrow$ 3x + 1 + 2x + 5 + c = 3x + 1 + 5x + 11 – x $\Rightarrow$ c = 2x + 6 = 12

1ª fila = 3ª columna $\Rightarrow$ 3x + 1 + 5x + 11 – x = 11 – x + d + c $\Rightarrow$ d = 8x + 1 – c = 24 + 1 – 12 = 13

82. La impresora ha soltado una mancha de tinta en una ecuación. Si la solución es *x* = 12, ¿cuál es el número oculto? $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x + \bullet}{4} = x - 10$

$$\frac{x}{2} - \frac{x + \bullet}{4} = x - 10 \Rightarrow \frac{12}{2} - \frac{12 + \bullet}{4} = 12 - 10 \Rightarrow 6 - \frac{12 + \bullet}{4} = 2 \Rightarrow 6 - 2 = \frac{12 + \bullet}{4} \Rightarrow 4 = \frac{12 + \bullet}{4} \Rightarrow 16 = 12 + \bullet \Rightarrow \bullet = 4$$

83. Resuelve el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 221 \\ xy = 70 \end{cases}$ **de este modo:**

1.º Multiplica por dos la segunda ecuación y suma las ecuaciones.

2.ºResta el doble de la segunda ecuación a la primera y resuelve el sistema obtenido.

3.º Escribe las soluciones que se obtienen.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 221 \\ xy = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 221 \\ 2xy = 140 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 361 \\ x^2 + y^2 - 2xy = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 361 \\ (x - y)^2 = 81 \end{cases}$$, que da lugar a cuatro sistemas:

- $\begin{cases} x + y = 19 \\ x - y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = 5 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y = 19 \\ x - y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 14 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y = -19 \\ x - y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -14 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y = -19 \\ x - y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -14 \\ y = -5 \end{cases}$

84. El periodo de vida de una ballena es cuatro veces el de una cigüeña, que vive 85 años más que un conejillo de indias, que vive 6 años menos que un buey, el cual vive 9 años menos que un caballo, que vive 12 años más que un pollo, que vive 282 años menos que un elefante, que vive 283 años más que un perro, que vive 2 años más que un gato, que vive 135 años menos que una carpa, que vive el doble de un camello, que vive 1014 años menos que el total de los periodos de vida de estos once animales. ¿Cuánto vive un caballo?

Cigüeña: x años	Buey: $x - 79$ años	Elefante: $x + 200$ años	Carpa: $x + 50$ años
Ballena: $4x$ años	Caballo: $x - 70$ años	Perro: $x - 83$ años	Camello: $\frac{x+50}{2}$ años
Conejo: $x - 85$ años	Pollo: $x - 82$ años	Gato: $x - 85$ años	

$$x + 4x + x - 85 + x - 79 + x - 70 + x - 82 + x + 200 + x - 83 + x - 85 + x + 50 + \frac{x+50}{2} = \frac{x+50}{2} + 1014$$

$27x - 418 = x + 50 + 2028 \Rightarrow 26x = 2496 \Rightarrow x = 96$

Un caballo vive 26 años.

85. Baskhara, matemático hindú del S.XIII, escribió en el libro Lilavati, el siguiente problema: "La raíz cuadrada de la mitad de un enjambre de abejas se esconde en la espesura de un jardín. Una abeja hembra con un macho quedan encerrados en una flor de loto, que los sedujo por su dulce perfume. Los $\frac{8}{9}$ del enjambre quedaron atrás. Dime el número de abejas."

Sea x el número de abejas del enjambre.

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + 2 + \frac{8x}{9} = x \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{x}{9} - 2 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{x^2}{81} + 4 - \frac{4x}{9} \Rightarrow 2x^2 - 153x + 648 = 0 \Rightarrow x = \frac{153 \pm 135}{4} = \begin{cases} \frac{9}{2} \\ 72 \end{cases}$$

En el enjambre había 72 abejas.

86. Una empresa mezcla pasta de papel de baja calidad, que compra por 0,25 €/kg con pasta de papel de mayor calidad, de 0,40 €/kg, para conseguir 50 kg de pasta de 0,31 €/kg. ¿Cuántos kilogramos utiliza de cada tipo de pasta?

Sea x los kilos de pasta de papel de baja calidad e y los kilos de pasta papel de mayor calidad.

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 0{,}25x + 0{,}4y = 50 \cdot 0{,}31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50 - y \\ 0{,}25x + 0{,}4y = 15{,}5 \end{cases} \Rightarrow 0{,}25(50 - y) + 0{,}4y = 15{,}5 \Rightarrow 0{,}15y = 3 \Rightarrow y = 20 \Rightarrow x = 30$$

Se utilizan 30 kg de pasta de baja calidad y 20 kg de pasta de mayor calidad.

87. Emprende.

En una reunión cada persona saluda al resto de asistentes. Si has contado 66 saludos. ¿Cuántas personas han asistido?

Sea x el número de personas que asistieron a la reunión. Cada persona dio la mano a $x - 1$ personas.

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66 \Rightarrow x(x - 1) = 132 \Rightarrow x^2 - x - 132 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 23}{2} = \begin{cases} 12 \\ -11 \end{cases}$$

A la reunión asistieron 12 personas.

88. – Anda, Alba, dame 20 € y así tendré el triple del dinero que tú.

– Qué graciosa eres Paula, dame tú 10 € y así tendremos las dos la misma cantidad.

¿Cuánto dinero tiene cada amiga?

Sea x el dinero, en euros, que tiene Paula e y el dinero, en euros, que tiene Alba.

$$\begin{cases} x + 20 = 3(y - 20) \\ x - 10 = y + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y - 80 \\ x = y + 20 \end{cases} \Rightarrow 3y - 80 = y + 20 \Rightarrow 2y = 100 \Rightarrow y = 50 \Rightarrow x = 70$$

Paula tiene 70 €, y Alba, 50 €.

89. Un ciclista ha calculado la velocidad idónea para hacer un viaje de 30 km. Pero se entretiene y sale 3 minutos más tarde, con lo que viaja 1 km/h más deprisa y llega a tiempo. Determina la velocidad prevista del ciclista.

Sea x la velocidad idónea que había calculado el ciclista e y el tiempo que iba a emplear en el viaje.

$$\begin{cases} 30 = xy \\ 30 = (x+1)(y-0{,}05) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{30}{x} \\ 30 = xy - 0{,}05x + y - 0{,}05 \end{cases} \Rightarrow 30 = 30 - 0{,}05x + \frac{30}{x} - 0{,}05 \Rightarrow 0{,}05x^2 + 0{,}05x - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 600 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 49}{2} = \begin{cases} 24 \\ -25 \end{cases}$$

La velocidad prevista por el ciclista era 24 km/h.

90. Ana, Bea, Clara y Delia se pesan de dos en dos. Ana y Bea pesan 88 kg, Bea y Clara pesan 91 kg, Clara y Delia pesan 86 kg. En ese momento, Delia dice que no hace falta hacer más pesadas. ¿Cuánto pesan Ana y Delia juntas?

Ana + Bea = 88   Bea + Clara = 91   Clara + Delia = 86

Sumando la primera igualdad con la tercera: Ana + Bea + Clara + Delia = 88 + 86

Como Bea + Clara = 91, entonces Ana + 91 + Delia = 88 + 86 $\Rightarrow$ Ana + Delia = 83

Ana y Delia pesan 83 kg juntas.

91. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su diagonal mide 15 cm, y su área, 108 cm^2.

Sean x e y las dimensiones del rectángulo.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 15^2 \\ x \cdot y = 108 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 15^2 \\ x = \dfrac{108}{y} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{108}{y}\right)^2 + y^2 = 15^2 \Rightarrow 108^2 + y^4 = 225y^2 \Rightarrow y^4 - 225y^2 + 11\,664 = 0 \text{ e } y^2 = z$$

$$\Rightarrow z^2 - 225z - 11\,664 = 0 \Rightarrow z = \frac{225 \pm 63}{2} \Rightarrow \begin{cases} 144 \Rightarrow y^2 = 144 \Rightarrow y = \pm 12 \\ 81 \Rightarrow y^2 = 81 \Rightarrow y = \pm 9 \end{cases}$$

Las soluciones negativas no las consideramos porque las dimensiones de un rectángulo tienen que ser positivas.

Si $y = 12 \Rightarrow x = 9$; si $y = 9 \Rightarrow x = 12$.

El rectángulo tendrá por dimensiones 9 cm y 12 cm.

92. El área de un rombo son 120 cm^2 y la proporción existente entre la diagonal mayor y la diagonal menor es 10:3. Calcula la medida de las diagonales.

Sea D la medida de la diagonal mayor y d la medida de la diagonal menor.

$$\begin{cases} \dfrac{Dd}{2} = 120 \\ 3D = 10d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Dd = 240 \\ d = \dfrac{3D}{10} \end{cases} \Rightarrow D \cdot \frac{3D}{10} = 240 \Rightarrow D^2 = 800 \Rightarrow D = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} \Rightarrow d = \frac{3 \cdot 20\sqrt{2}}{10} = 6\sqrt{2}$$

La diagonal mayor mide $20\sqrt{2}$ cm y la menor $6\sqrt{2}$ cm.

93. Las edades actuales de una mujer y su hijo son 49 y 25 años, respectivamente. ¿Hace cuántos años el producto de sus edades era 640?

	Edad actual	Edad hace x años
Madre	49	$49 - x$
Hijo	25	$25 - x$

$$(49 - x)(25 - x) = 640 \Rightarrow 1225 - 74x + x^2 = 640 \Rightarrow x^2 - 74x + 585 = 0 \Rightarrow x = \frac{74 \pm 56}{2} = \begin{cases} 65 \\ 9 \end{cases}$$

Hace 65 años no pudo ser porque no habían nacido. Por tanto, hace 9 años el producto de las edades de la mujer y de su hijo era 640.

94. En unos laboratorios se ha comprobado que el número de células de una muestra se quintuplica cada minuto transcurrido. Si inicialmente había dos células, ¿cuántos minutos deben transcurrir para que el número de células sea de 19 531 250?

Sea x los minutos que deben transcurrir para que el número de células sea de 19 531 250.

$2 \cdot 5^x = 19\,531\,250 \Rightarrow 5^x = 9\,765\,625 \Rightarrow 5^x = 5^{10} \Rightarrow x = 10$

Deben transcurrir 10 minutos.

95. Una muestra radiactiva se va desintegrando de modo que, cada cinco años, su masa se reduce a la mitad. Si se tienen 800 g de dicha sustancia radiactiva, ¿en cuánto tiempo su masa se reducirá a 50 g?

Sea x el tiempo que ha de pasar para que su masa se reduzca a 50 gramos.

$$800\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = 50 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{\frac{x}{5}} = 2^4 \Rightarrow \frac{x}{5} = 4 \Rightarrow x = 20$$

Han de transcurrir 20 años.

96. Si r y s son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, el valor de $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}$ es:

A. $b^2 - 4ac$ **B.** $\frac{b^2-4ac}{2a}$ **C.** $\frac{b^2-2ac}{c^2}$ **D.** $\frac{b^2-2ac}{a^2c^2}$

Si r y s son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $r+s=\frac{-b}{a}$ y $r\cdot s=\frac{c}{a}$:

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}=\frac{r^2+s^2}{r^2s^2}=\frac{(r+s)^2-2rs}{(rs)^2}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$$

La respuesta correcta es la C.

97. Si la ecuación $\frac{x^2-bx}{ax+c}=\frac{m-1}{m+1}$ tiene soluciones opuestas, el valor de m debe ser:

A. $\frac{a-b}{a+b}$ **B.** $\frac{a+b}{a-b}$ **C.** $\frac{1}{c}$ **D.** $\frac{1}{a}$

$\frac{x^2-bx}{ax+c}=\frac{m-1}{m+1} \Rightarrow (m + 1)(x^2 - bx)x = (m - 1)(ax + c) \Rightarrow (m + 1)(x^2 - bx) - (m - 1)(ax + c) = 0$

$(m + 1)x^2 + (-mb - b - ma + a)x - mc + c = 0$

Como las soluciones son opuestas, el coeficiente de x debe ser cero:

$-mb - b - ma + a = 0 \Rightarrow -b + a = mb + ma \Rightarrow a - b = m(a + b) \Rightarrow m=\frac{a-b}{a+b}$

La respuesta correcta es la A.

98. La solución del sistema $\begin{cases}3^{x+y}=81\\81^{x-y}=3\end{cases}$ verifica que:

A. No tiene solución

B. $x=\frac{5}{2}, y=\frac{3}{2}$

C. x e y son de distinto signo.

D. Nada de lo anterior es cierto

$$\begin{cases}3^{x+y}=81\\81^{x-y}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^{x+y}=3^4\\3^{4x-4y}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=4\\4x-4y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4-y\\4x-4y=1\end{cases}\Rightarrow 4(4-y)-4y=1\Rightarrow 16-4y-4y=1\Rightarrow y=\frac{15}{8}\Rightarrow x=\frac{17}{8}$$

La respuesta correcta es la D.

Encuentra el error

99. Pablo se alegró al ver que la última pregunta del examen consistía en resolver una ecuación de primer grado. Y se confió y ni siquiera comprobó su solución. Observa cómo resolvió la ecuación y encuentra su error.

$$\frac{x+1}{3}-\frac{2x-4}{6}=\frac{x-3}{2}\Rightarrow\frac{2(x-1)}{3}-\frac{2x-4}{6}=\frac{3(x-3)}{2}\Rightarrow 2(x+1)-2x-4=3(x+3)\Rightarrow 2x+2-2x-4=3x-9\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7=3x\Rightarrow x=\frac{7}{3}$$

La respuesta es incorrecta porque los denominadores de la segunda ecuación equivalente deberían ser todos 6, el signo del 4 de la tercera ecuación equivalente debería ser un más y, además, en el paréntesis de esta tercera ecuación debería aparecer $x – 3$.

$$\frac{x+1}{3}-\frac{2x-4}{6}=\frac{x-3}{2}\Rightarrow\frac{2(x-1)}{6}-\frac{2x-4}{6}=\frac{3(x-3)}{6}\Rightarrow 2(x+1)-2x+4=3(x-3)\Rightarrow 2x+2-2x+4=3x-9\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 15=3x\Rightarrow x=5$$

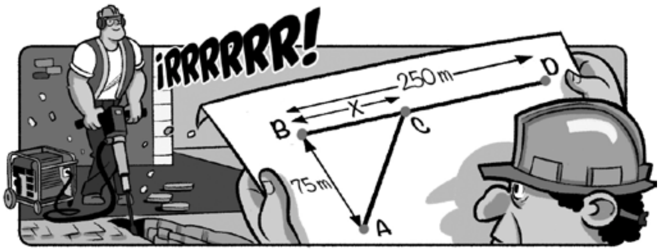
PONTE A PRUEBA

La civilización del futuro

Actividad resuelta.

La conducción del gas

El croquis muestra dos puntos, *A* y *D*, entre los que se quiere construir un canal para conducir el gas. Como se quiere aprovechar un trozo de un antiguo canal que unía los puntos *B* y *D*, hay que ubicar el punto *C* donde se unirán el tramo nuevo y el reformado. El coste del tramo nuevo *AC* es de 10 €/m, y el de reparar cada metro del tramo antiguo *CD* es de 2 €.



1. La tabla muestra las tres opciones que se consideran para ubicar el punto *C*.

Opción	I	II	III
Distancia *BC*	**30 m**	**50 m**	**100 m**

Indica cuál es la opción más económica.

Opción I: $AC=+\sqrt{30^2+75^2}=80{,}78$ m y *CD*: 250 – 30 = 220 m $\Rightarrow$ Precio canal = 80,78 · 10 + 220 · 2 = 1247,80 €

Opción II: $AC=+\sqrt{50^2+75^2}=90{,}14$ m , *CD*: 250 – 50 = 200 m $\Rightarrow$ Precio canal = 90,14 · 10 + 200 · 2 = 1301,40 €

Opción III: $AC=+\sqrt{100^2+75^2}=125$ m , *CD*: 250 – 100 = 150 m $\Rightarrow$ Precio canal = 125 · 10 + 150 · 2 = 1550 €

La opción más económica es la I.

2. Calcula la distancia *x* que debería tener *BC* para que el coste total fuera 1270 €.

Llamamos *x* a la distancia *BC* e *y* a la distancia *AC*.

$$\begin{cases}x^2+75^2=y^2\\2(250-x)+10y=1270\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+75^2=y^2\\x=5y-385\end{cases}\Rightarrow(385-5y)^2+75^2=y^2\Rightarrow 24y^2-3850y+153\,850=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=\frac{3850\pm230}{48}=\begin{cases}85\Rightarrow x=40\\75{,}42\Rightarrow x=-7{,}9\end{cases}$$

BC debería medir 40 m para que el coste total fuera 1270 €.

La glotocronología

La glotocronología es una disciplina a caballo entre la lingüística y las matemáticas que se ocupa de la relación entre las lenguas a lo largo del tiempo. Fue desarrollada por el lingüista Morris Swadesh partiendo de dos principios:

- **Existe un vocabulario básico en cada lengua, y es relativamente estable.**
- **Las palabras básicas desaparecen de forma constante a una tasa del 14 % cada milenio.**

Según la teoría de Swadesh, si una lengua originariamente tenía N_0 palabras, el número N de palabras que se conservarán después de t milenios viene dado por la expresión $N = N_0 \cdot (1 - 0{,}14)^t$.

1. ¿Cuál es la tasa de palabras básicas que se conservan? Justifica que no depende del número original de palabras.

La tasa de palabras básicas que se conservan es $\frac{N}{N_0} = 0{,}86^t$, que no depende del número original de palabras.

2. Dos lenguas emparentadas comparten hoy el 90 % de sus palabras básicas. De acuerdo con el método de Swadesh, ¿hace cuánto tiempo fueron la misma?

A. 7000 años **B. 700 años** **C. 800 años** **D. 8000 años**

Como $\frac{N}{N_0} = 0{,}86^t$ tenemos que 0,9 = $0{,}86^t$ y, por tanto, $t = \frac{\log 0{,}9}{\log 0{,}86} = 0{,}7$ milenios, es decir, 700 años.

La respuesta correcta es la B.

3. La lengua indoeuropea, de la que entre otras muchas lenguas provienen el castellano, el hindi, el noruego o el yiddish, tuvo su origen aproximadamente en el 3000 a. C. Aplicando la teoría de Swadesh, ¿qué porcentaje de palabras básicas de tu lengua tiene su origen en la indoeuropea?

Como han pasado 5 milenios, se tiene que $\frac{N}{N_0} = 0{,}86^5 = 0{,}47$. Se conserva el 47 % de las palabras básicas.

AUTOEVALUACIÓN

1. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas.

a) $\dfrac{3(-2x+1)}{2}-5(x-3)=\dfrac{3x-1}{4}+\dfrac{1}{2}$ **b)** $6x^4+7x^3-52x^2-63x-18=0$

a) $\dfrac{3(-2x+1)}{2}-5(x-3)=\dfrac{3x-1}{4}+\dfrac{1}{2} \Rightarrow -12x+6-20x+60=3x-1+2 \Rightarrow -35x=-65 \Rightarrow x=\dfrac{65}{35}=\dfrac{13}{7}$

b) $P(x)=6(x-3)(x+3)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow$ Soluciones: $x=3$, $x=-3$, $x=-\dfrac{2}{3}$ y $x=-\dfrac{1}{2}$

	6	7	–52	–63	–18
3		18	75	69	18
	6	25	23	6	0
–3		–18	–21	–6	
	6	7	2	0	

$6x^2+7x+2=0 \Rightarrow x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-48}}{12}=\dfrac{-7\pm1}{12}=\begin{cases}\dfrac{-8}{12}=\dfrac{-2}{3}\\[2mm] \dfrac{-6}{12}=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$

2. Resuelve estas ecuaciones racionales.

a) $\dfrac{4x+5}{3}=\dfrac{1}{2x+3}$ **b)** $\dfrac{x^2-3}{2}=\dfrac{-3}{2x^2+1}$ **c)** $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{8}{x+5}=\dfrac{x+1}{x^2+3x-10}$

a) $\dfrac{4x+5}{3}=\dfrac{1}{2x+3} \Rightarrow (4x+5)(2x+3)=3 \Rightarrow 8x^2+22x+12=0 \Rightarrow x=\dfrac{-22\pm\sqrt{100}}{16}=\begin{cases}-2\\ \dfrac{-12}{16}=\dfrac{-3}{4}\end{cases}$

b) $\dfrac{x^2-3}{2}=\dfrac{-3}{2x^2+1} \Rightarrow (x^2-3)(2x^2+1)=-6 \Rightarrow 2x^4-5x^2+3=0$

$2x^4-5x^2+3=0$ y $z=x^2 \Rightarrow 2z^2-5z^2+3=0 \Rightarrow z=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\dfrac{5\pm1}{4} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm1\\ z=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow x^2=\dfrac{3}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\end{cases}$

c) $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{8}{x+5}=\dfrac{x+1}{x^2+3x-10} \Rightarrow \dfrac{3(x+5)+8(x-2)}{(x-2)(x+5)}=\dfrac{x+1}{(x-2)(x+5)} \Rightarrow 3x+15+8x-16=x+1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{5}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\sqrt{4x+13}+2=\sqrt{-2x+3}$ **b)** $\log_3\sqrt[5]{81}=3x+2$ **c)** $9^x-10\cdot3^x+9=0$

a) $4x+13+4\sqrt{4x+13}+4=-2x+3 \Rightarrow 2\sqrt{4x+13}=-3x-7 \Rightarrow 9x^2+26x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{-26\pm28}{18}=\begin{cases}\dfrac{1}{9}\\ -3\end{cases}$

- $\sqrt{\dfrac{4}{9}+13}+2\neq\sqrt{-\dfrac{2}{9}+3} \Rightarrow x=\dfrac{1}{9}$ no es solución
- $\sqrt{-12+13}+2=\sqrt{6+3} \Rightarrow x=-3$ es solución

b) $\log_3\sqrt[5]{81}=3x+2 \Rightarrow \sqrt[5]{81}=3^{3x+2} \Rightarrow 3^{\frac{4}{5}}=3^{3x+2} \Rightarrow \dfrac{4}{5}=3x+2 \Rightarrow 4=15x+10 \Rightarrow x=\dfrac{-6}{15}=\dfrac{-2}{5}$

c) $9^x-10\cdot3^x+9=0 \Rightarrow 3^{2x}-10\cdot3^x+9=0$

$3^x=z \Rightarrow z^2-10z+9=0 \Rightarrow z=\dfrac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\dfrac{10\pm8}{2}=\begin{cases}9 \Rightarrow 3^x=9 \Rightarrow x=2\\ 1 \Rightarrow 3^x=1 \Rightarrow x=0\end{cases}$

4. Resuelve el siguiente sistema lineal: $\begin{cases} \mathbf{2x + 5y = 19} \\ \mathbf{3x - y = 3} \end{cases}$

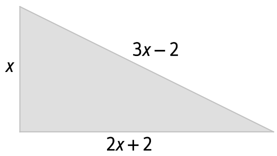
$$\begin{cases} 2x + 5y = 19 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 19 \\ y = 3x - 3 \end{cases} \Rightarrow 2x + 5(3x - 3) = 19 \Rightarrow 2x + 15x - 15 = 19 \Rightarrow 17x = 34 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$$

5. Resuelve el siguiente sistema no lineal: $\begin{cases} \mathbf{3x^2 + 2y^2 = 29} \\ \mathbf{x^2 - 4y = 5} \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 29 \\ x^2 - 4y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 29 \\ \underline{3x^2 - 12y = 15} \end{cases} \Rightarrow y^2 + 6y - 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow y = \begin{cases} 1 \Rightarrow x = \pm 3 \\ -7 \Rightarrow x^2 = -23 \text{ Sin solución} \end{cases}$$

$$2y^2 + 12y = 14$$

6. ¿Cuánto mide la hipotenusa de este triángulo rectángulo?



$(3x – 2)^2 = x^2 + (2x + 2)^2 \Rightarrow 9x^2 + 4 – 12x = x^2 + 4x^2 + 4 + 8x \Rightarrow 4x^2 – 20x = 0$

$\Rightarrow 4x(x – 5) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 5 \end{cases} \Rightarrow$ La hipotenusa del triángulo mide $3 \cdot 5 – 2 = 13$.

7. Un grupo de estudiantes decide contratar un autobús. Si cada uno paga 14 euros, faltarán 4 € para poder pagar el autobús, pero si cada uno paga 16 €, sobrarán 6 €. ¿Cuántos euros debe pagar cada uno para recaudar el precio exacto?

Llamamos x al precio del autobús e y al número de alumnos que van a la excursión.

$$\begin{cases} x = 14y + 4 \\ x = 16y - 6 \end{cases} \Rightarrow 14y + 4 = 16y - 6 \Rightarrow 10 = 2y \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x = 74$$

El precio del autobús es 74 € y van 5 amigos. Cada uno tendrá que pagar 14,80 €.