Consecuencias de los criterios de semejanza

5.45. (TIC) En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 125 milímetros. Calcula el valor de uno de los catetos sabiendo que su proyección sobre la hipotenusa mide 45 milímetros.

Por el teorema del cateto:

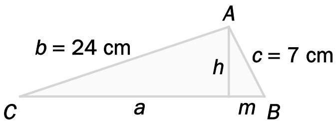
$$b^2 = n \cdot a \Rightarrow b^2 = 45 \cdot 125 = 5625 \Rightarrow b = \sqrt{5625} = 75 \text{ mm.}$$

5.46. (TIC) En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 54 decímetros, y su proyección sobre la hipotenusa, 32,4. Calcula la medida de la hipotenusa.

Por el teorema del cateto:

$$b^2 = n \cdot a \Rightarrow 54^2 = a \cdot 32{,}4 \Rightarrow a = \frac{54^2}{32{,}4} = \frac{2916}{32{,}4} = 90 \text{ dm}$$

5.47. (TIC) En un triángulo rectángulo, los catetos miden 24 y 7 centímetros, respectivamente. Calcula el valor de la hipotenusa y las medidas de las proyecciones de los catetos sobre ella. Calcula también el valor de la altura sobre la hipotenusa.



Por el teorema de Pitágoras se calcula la hipotenusa:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625 \Rightarrow a = \sqrt{625} = 25 \text{ cm}$$

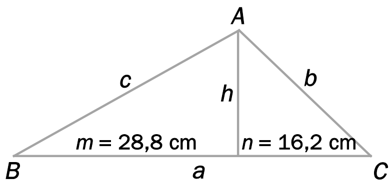
Por el teorema del cateto se calculan las proyecciones sobre la hipotenusa:

$$\begin{cases} b^2 = n \cdot a \Rightarrow 576 = 25n \Rightarrow n = \dfrac{576}{25} = 23{,}04 \text{ cm} \\ c^2 = m \cdot a \Rightarrow 49 = 25m \Rightarrow m = \dfrac{49}{25} = 1{,}96 \text{ cm} \end{cases}$$

Por el teorema de la altura se calcula la altura sobre la hipotenusa:

$$h^2 = m \cdot n = 23{,}04 \cdot 1{,}96 = 45{,}1584 \Rightarrow h = \sqrt{45{,}1584} = 6{,}72 \text{ cm}$$

5.48. (TIC) En el siguiente triángulo rectángulo en *A*, calcula la medida de los segmentos desconocidos.



Por el teorema de la altura:

$$h^2 = m \cdot n = 28{,}8 \cdot 16{,}2 = 466{,}56 \Rightarrow h = \sqrt{466{,}56} = 21{,}6 \text{ cm};$$

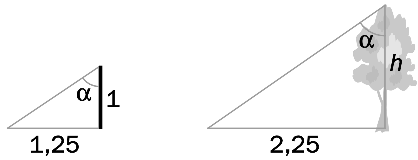
$$a = m + n = 28{,}8 + 16{,}2 = 45 \text{ cm}$$

Por el teorema del cateto:

$$\begin{cases} b^2 = n \cdot a \Rightarrow b^2 = 16{,}2 \cdot 45 = 729 \Rightarrow b = \sqrt{729} = 27 \text{ cm} \\ c^2 = m \cdot a \Rightarrow c^2 = 28{,}8 \cdot 45 = 1296 \Rightarrow c = \sqrt{1296} = 36 \text{ cm} \end{cases}$$

PROBLEMAS

5.49. (TIC) La sombra de un árbol es de 2,25 metros y, en ese mismo momento, la sombra de un palo de 1 metro de altura es de 1,25 metros. Calcula la altura del árbol.



Dado que en un mismo instante, la inclinación α de los rayos solares es la misma, los triángulos de la figura son semejantes, ya que cumplen el primer criterio de semejanza (dos ángulos iguales).

En consecuencia, los lados han de ser proporcionales: $\frac{1}{h} = \frac{1,25}{2,25} \Rightarrow h = \frac{2,25}{1,25}$ = 1,8 metros.

5.50. (TIC) En un mapa que representa una zona de montaña se indica que la escala es de 1:25 000. Calcula la distancia real que separa dos refugios si en el mapa están separados por 3,5 centímetros.

En el mapa, un centímetro representa 25 000 cm = 0,25 km de la realidad.

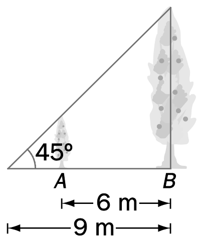
Los 3,5 cm del plano se corresponden con 3,5 · 0,25 = 0,875 km = 875 m.

5.51. (TIC) La distancia entre dos ciudades es de 320 kilómetros. Calcula la distancia que separa ambas ciudades en un mapa con escala 1:1 125 000.

En el mapa, un centímetro representa 11,25 km de la realidad.

La distancia que separa a las ciudades en el mapa es $\frac{320}{11,25}$ = 28,44 cm.

5.52. Calcula la distancia que debe recorrer un pájaro que quiere volar desde la copa del árbol *A* a la del *B*.



La distancia que se quiere calcular es *CD*.

Se calcula primero el valor de *OC*, mediante el teorema de Pitágoras:

$OC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ m

Gracias al teorema de Tales: $\frac{3\sqrt{2}}{3} = \frac{CD}{6} \Rightarrow CD = 6\sqrt{2}$ = 8,5 m

5.53. (TIC) El logotipo de una empresa tiene la forma de un hexágono cuyos lados miden 3, 4, 5, 7, 8 y 9 centímetros. En los carteles publicitarios se quiere dibujar un hexágono semejante de 117 centímetros de perímetro. ¿Cuánto miden los lados homólogos?

Perímetro del hexágono pequeño = 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 36 cm. Razón $k = \frac{117}{36} = 3,25$

Lados del hexágono grande:

3 · 3,25 = 9,75 cm	4 · 3,25 = 13 cm	5 · 3,25 = 16,25 cm
7 · 3,25 = 22,75 cm	8 · 3,25 = 26 cm	9 · 3,25 = 29,25 cm

5.54. En el plano de una vivienda en construcción aparece dibujado un salón rectangular de 13,5 centímetros cuadrados. Si la escala del plano es de 1:150, ¿cuál es el área real del salón?

La escala es 1:150, por lo que la razón es *k* = 150 : 1 = 150.

Área real = $(150)^2$ · 13,5 = 22 500 · 13,5 = 303 750 cm^2 = 30,375 m^2

5.55. (TIC) Las alturas de Mónica y su madre en una fotografía, cuya escala es de 1:75, son 2,08 y 2,2 centímetros, respectivamente. Si encargan una ampliación de un 25% en las dimensiones de la fotografía, ¿cuánto medirán las dos en ella? ¿Cuál es la escala?

Altura de Mónica en la ampliación: $2{,}08 \cdot 1{,}25 = 2{,}6$ cm

Altura de la madre en la ampliación: $2{,}2 \cdot 1{,}25 = 2{,}75$ cm

Escala de la ampliación: $\dfrac{75}{1{,}25} = 60 \Rightarrow 1:60$

5.56. Los bomberos de una comarca emiten un informe sobre el número de hectáreas quemadas en el último incendio. En un mapa de escala 1:60 000, la zona afectada tiene una superficie de 8 centímetros cuadrados. ¿Cuál es el resultado del informe?

Razón $k = \dfrac{60\,000}{1} = 60\,000$

Área real = $(60\,000)^2 \cdot 8 = 28\,800\,000\,000$ cm^2 = $288\,000\,000$ m^2 = 288 km^2

5.57. (TIC) Un arquitecto construye una maqueta de un centro de exposiciones cuya planta es un rectángulo de 90 por 50 centímetros y cuyo volumen es de 350 000 centímetros cúbicos. Si la escala de la maqueta es de 1:150, calcula las dimensiones reales de la planta y el volumen del edificio.

Largo de la planta real: $90 \cdot 150 = 13\,500$ cm = 135 m

Ancho de la planta real: $50 \cdot 150 = 7500$ cm = 75 m

Volumen real del edificio: $(150)^3 \cdot 0{,}35$ m^3 = $1\,181\,250$ m^3

5.58. (TIC) Un estudiante de Bellas Artes desea trabajar en una figura a escala del *David* de Miguel Ángel cuya altura es de 60 centímetros.

Si el auténtico *David* mide 4,34 metros de altura y tiene un volumen de 1,2 metros cúbicos, ¿cuál será el volumen de la figura esculpida por el estudiante?

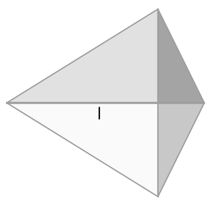
Razón de semejanza: $k = \dfrac{60}{434} \Rightarrow$ Volumen de la figura: $\left(\dfrac{60}{434}\right)^3 \cdot 1{,}2 \text{ m}^3 = 0{,}0032 \text{ m}^3$

5.59. (TIC) En un mapa de escala 1:50 000, la distancia que separa los dos extremos de un camino recto es de 6,5 centímetros. ¿Cuánto tiempo tardará una persona que quiere realizar dicho camino andando a una velocidad de 5 km/h?

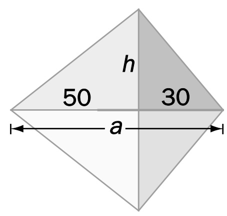
1 cm del mapa se corresponde con 50 000 cm = 0,5 km de la realidad.

Por tanto, el tiempo que se tardará en recorrer el camino será: $\dfrac{6{,}5 \cdot 0{,}5}{5}$ = 0,65 horas = 39 minutos.

5.60. (TIC) Se quiere construir una cometa utilizando trozos de tela con forma de triángulo rectángulo. Para ello, se cortan los triángulos por la altura sobre la hipotenusa de forma que esta se divide en dos segmentos de 30 y 50 centímetros, respectivamente. ¿Qué área deben tener los triángulos originales?



Los segmentos de 30 y 50 cm son las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa. Con el teorema de la altura podemos calcular la altura sobre la hipotenusa de los triángulos originales.



$h^2 = m \cdot n = 50 \cdot 30 = 1500 \Rightarrow h = \sqrt{1500} = 10\sqrt{15}$ cm

$a = m + n = 30 + 50 = 80$ cm

El área de los triángulos es:

$A = \dfrac{a \cdot h}{2} = \dfrac{80 \cdot 10\sqrt{15}}{2} = 400\sqrt{15} = 1549{,}2$ cm

5.61. (TIC) Una tienda de fotografía ofrece varios tamaños para realizar copias en papel. Las posibles dimensiones en centímetros son:

9 × 12 12 × 15 14 × 18 20 × 30

¿En cuál de ellos se pierde menos contenido de la fotografía si el tamaño de la figura digital original es de 25 × 35 milímetros?

Si las dimensiones de los formatos no son semejantes a las de la fotografía, siempre se perderá algo de la imagen. El formato que más se asemeje a la razón entre dimensiones será el que más aproveche la imagen.

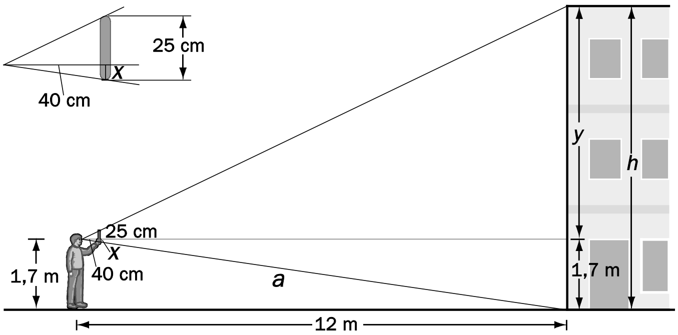
La razón entre dimensiones de la fotografía original es: $\frac{25}{35}=\frac{5}{7}=0,71$.

Las razones entre las dimensiones de las copias son:

$\frac{9}{12}=\frac{3}{4}=0,75$ $\frac{12}{15}=\frac{4}{5}=0,8$ $\frac{14}{18}=\frac{7}{9}=0,78$ $\frac{20}{30}=\frac{2}{3}=0,67$

Con lo cual, los formatos de 9 × 12 y de 20 × 30 son los que más aprovechan el tamaño de la imagen.

5.62. (TIC) Para realizar prácticas de óptica, un estudiante que mide 1,70 metros, situado a 12 metros de un edificio, coloca frente a sus ojos una regla vertical de 25 centímetros con la que oculta exactamente la altura del mismo. Si la distancia del ojo a la regla es de 40 centímetros, calcula la altura del edificio.



Los triángulos que forman la regla y el edificio son semejantes, ya que se encuentran en posición de Tales.

Mediante el teorema de Pitágoras calculamos la distancia *a*:

$a=\sqrt{1,7^2+12^2}=12,12\ \text{m}$

Los dos triángulos inferiores también son semejantes entre sí, por lo que podemos calcular *x* mediante el teorema de Tales.

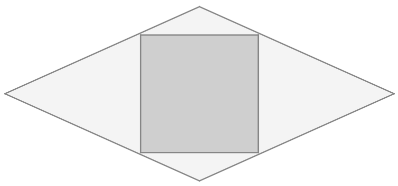
$$\frac{12}{1,7}=\frac{0,4}{x}\Rightarrow x=\frac{1,7\cdot 0,4}{12}=0,057$$

Aplicamos el teorema de Tales a los dos triángulos superiores para calcular el valor de *y*:

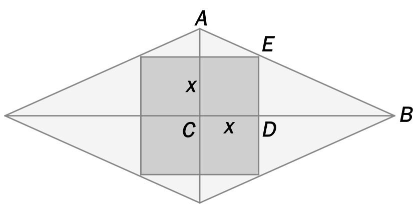
$$\frac{12}{y}=\frac{0,4}{0,25-x}\Rightarrow\frac{12}{y}=\frac{0,4}{0,193}\Rightarrow y=\frac{12\cdot 0,193}{0,4}=5,8\ \text{m}$$

La altura del edificio es: $h = 5,8 + 1,7 = 7,5$ m.

5.63. (TIC) Se quieren fabricar losetas como las de la figura que estén formadas por un rombo de diagonales 18,1 y 8,36 centímetros, respectivamente, y un cuadrado inscrito en él. Calcula el área de la zona oscura y la suma de las áreas de las zonas claras.



Los triángulos *ABC* y *DEC* son semejantes. Por tanto:



$$\frac{AC}{BC}=\frac{DE}{DB}\Rightarrow\frac{4,18}{9,05}=\frac{x}{9,05-x}\Rightarrow 37,829-4,18x=9,05x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{37,829}{13,23}=2,86\ \text{cm}$$

Área oscura: $(2\cdot 2,86)^2=32,7\ \text{cm}^2$

Área clara: $\frac{18,10\cdot 8,36}{2}-32,7=42,96\ \text{cm}^2$

AMPLIACIÓN

5.64. Si un arco de 60º en un círculo *A* tiene la misma longitud que un arco de 45º en un círculo *B*, el cociente entre el área de *A* y el área de *B* es:

a) $\frac{16}{9}$ **b)** $\frac{9}{16}$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{3}{4}$

Llamando r_A y r_B a los radios de los círculos *A* y *B*, nos dicen que $\frac{2\pi r_A}{6} = \frac{2\pi\, r_B}{8} \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

El cociente entre las áreas será: $\frac{A_A}{A_B} = \frac{\pi r_A^2}{\pi r_{B^2}} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$, la respuesta b.

5.65. Se trazan 9 paralelas a la base de un triángulo que dividen cada uno de los otros dos lados en 10 segmentos iguales y el área en 10 trapecios de diferentes áreas. Si el área del mayor de estos trapecios es 38, el área del triángulo original es:

a) 180 **b) 190** **c) 200** **d) 210**

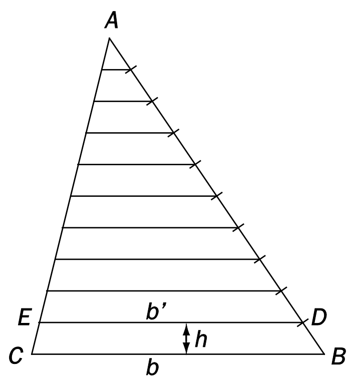
Llamando *b* y *b′* a las bases del trapecio mayor y *h* a su altura, se tiene que *b* es la base del triángulo, y 10*h*, su altura.

Por otra parte, los triángulos *BDE* y *BAC* son semejantes, por estar en posición de Tales, y se puede escribir que $\frac{b'}{b} = \frac{9h}{10h} \Rightarrow b' = \frac{9b}{10}$.

Se puede calcular el área del trapecio *ACED*:

$38 = \frac{b + \frac{9b}{10}}{2} \cdot h \Rightarrow \frac{19bh}{20} = 38.$

El área del triángulo *ABC* $= \frac{b \cdot 10h}{2} = 200$, la respuesta c

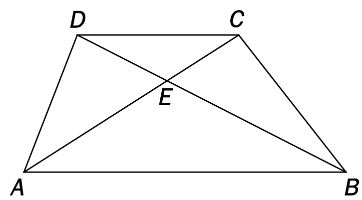


5.66. Sea *ABCD* un trapecio en el que la base *AB* mide el doble que la base *DC* y sea *E* el punto de intersección de sus diagonales. Si la diagonal *AC* mide 11 cm, la longitud en cm del segmento *EC* es:

a) $\frac{11}{3}$ **b)** $\frac{15}{4}$ **c) 4** **d)** $\frac{7}{2}$

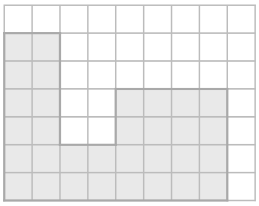
En la figura observamos que los triángulos *AEB* y *CDE* son semejantes y de razón de semejanza 2, ya que la base *AB* mide el que la base *DC*.

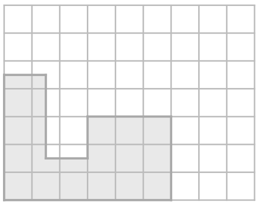
Así pues, $\frac{AE}{EC} = 2$, y como *AE* + *EC* = 11, *EC* = $\frac{11}{3}$



AUTOEVALUACIÓN

5.1. Dibuja una figura semejante a la siguiente con razón de semejanza 0,75. Indica los perímetros de las dos figuras y comprueba que su razón también es 0,75.





El perímetro de la figura dada es de 32 cm.

La razón de semejanza coincidirá la razón de los perímetros.

El perímetro de la segunda figura es 24.

Por tanto: $k = \frac{3}{4} = 0{,}75$

5.2. Indica cuáles de los siguientes pares de triángulos son semejantes y, en caso afirmativo, calcula la razón de semejanza de sus lados.

a) 3, 4, 5 y 4,5; 6; 7,5

b) 2, 5, 6 y 4, 10, 11

c) 5, 12, 13 y 12,5; 30; 32,5

d) 4, 7, 10 y 2,4; 4,2; 6

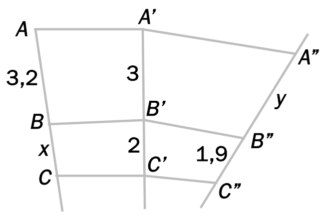
a) $\frac{4{,}5}{3} = \frac{6}{4} = \frac{7{,}5}{5} = 1{,}5 \Rightarrow$ Como los tres lados son proporcionales, los triángulos son semejantes y la razón de semejanza es k = 1,5.

b) $\frac{4}{2} = \frac{10}{5} \neq \frac{11}{6} \Rightarrow$ Los tres lados no son proporcionales, por lo que los triángulos no son semejantes.

c) $\frac{12{,}5}{5} = \frac{30}{12} = \frac{32{,}5}{13} = 2{,}5 \Rightarrow$ Los lados son proporcionales, por lo que los triángulos son semejantes y la razón de semejanza es k = 2,5.

d) $\frac{2{,}4}{4} = \frac{4{,}2}{7} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \Rightarrow$ Los lados son proporcionales, por lo que los triángulos son semejantes y la razón de semejanza es k = 0,6.

5.3. Calcula el valor de *x* e *y* en la siguiente figura.



Aplicando el teorema de Tales a las parejas de rectas secantes *AC* y *A'C'*, por un lado, y *A'C'* y *A"C"*, por el otro, se pueden escribir las siguientes proporciones:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{3{,}2}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 3{,}2}{3} = 2{,}13$$

$$\frac{A'B'}{A''B''} = \frac{B'C'}{B''C''} \Rightarrow \frac{3}{y} = \frac{2}{1{,}9} \Rightarrow y = \frac{3 \cdot 1{,}9}{2} = 2{,}85$$

5.4. Me han regalado una reproducción de la torre Eiffel a escala 1:4000 que mide 8 centímetros de altura. ¿Cuál es la altura real del monumento?

8 · 4000 = 32 000 cm = 320 m

5.5. Un triángulo de 15 centímetros de perímetro es semejante a otro triángulo de lados 7,5, 6 y 9 centímetros. ¿Cuánto miden los lados de ese triángulo? ¿Cuál es la razón de semejanza?

La razón de semejanza coincide con la razón de los perímetros. Por tanto:

$k = \frac{7{,}5+6+9}{15} = \frac{22{,}5}{15} = 1{,}5$

Los lados del nuevo triángulo son:

7,5 : 1,5 = 5 6 : 1,5 = 4 9 : 1,5 = 6

5.6. Las áreas de dos hexágonos semejantes son de 104 y 26 centímetros cuadrados, respectivamente. ¿Cuánto mide el perímetro del mayor si el del menor es de 12 centímetros?

La razón de las áreas de los hexágonos es $k^2 = \frac{104}{26} = 4 \Rightarrow k = \sqrt{4} = 2$.

La razón de los perímetros será también 2; por tanto, el perímetro del mayor será $p = 2 \cdot 12 = 24$ cm.

5.7. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 metros, respectivamente. Se quiere dibujar otro triángulo rectángulo semejante de modo que la hipotenusa mida 12,5 metros. ¿Cuánto deben medir los catetos?

La hipotenusa del primer triángulo mide $\sqrt{3^2+4^2} = 5$ cm, por lo que $k = \frac{12{,}5}{5} = 2{,}5$.

Los catetos del nuevo triángulo son 3 · 2,5 = 7,5 cm y 4 · 2,5 = 10 cm

5.8. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 64 y 48 centímetros, respectivamente. Calcula el valor de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa y el de la altura sobre la hipotenusa.

La hipotenusa mide $\sqrt{64^2+48^2} = 80$ cm.

Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden: $m = \frac{64^2}{80} = 51{,}2$ cm, $n = \frac{48^2}{80} = 28{,}8$ cm.

La altura relativa a la hipotenusa mide $h = \sqrt{m \cdot n} = \sqrt{51{,}2 \cdot 28{,}8} = 38{,}4$ cm.

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Calcula e imagina > El túnel de Eupalinos

Cuando Polícrates encargó a Eupalinos construir un túnel bajo la montaña que, partiendo simultáneamente de *A* y *B*, se encontrara en las profundidades de la roca, el sabio griego recurrió a los triángulos semejantes.

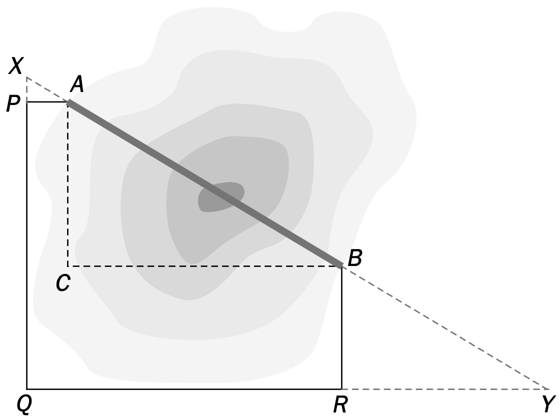
Sigue paso a paso el método que utilizó para calcular la dirección con la que se debía horadar la montaña desde cada uno de los extremos.

5.1. **Traza el triángulo imaginario *ABC* y, en la falda de la montaña, toma las medidas *AP* = 100 metros, *PQ* = 700 metros, *QR* = 1060 metros y *RB* = 300 metros, en las que todos los ángulos son rectos.**

A partir de ellas, obtén las distancias *AC* y *CB*.

$AC = PQ - BR = 400$ m

$CB = QR - AP = 960$ m.



5.2. **¿Cuánto medirá el túnel?**

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{400^2 + 960^2} = 1040$ m.

5.3. **¿Cómo deben ser los segmentos *PX* y *RY* para que los triángulos *ABC*, *XPA* y *BRY* sean semejantes?**

Una prolongación de *PQ* y *QR* y tales que $\frac{PX}{AP} = \frac{BR}{RY} = \frac{AC}{BC}$.

5.4. **Halla las distancias *PX* y *RY*.**

$\frac{PX}{100} = \frac{400}{960} \Rightarrow PX = 41{,}67 \text{ m}$ y $\frac{300}{RY} = \frac{400}{960} \Rightarrow RY = 720 \text{ m}$

5.5. **A partir de los puntos *X* e *Y* se trazan los segmentos *XA* y *BY*, que dan la dirección en la que se debe empezar a cavar.**

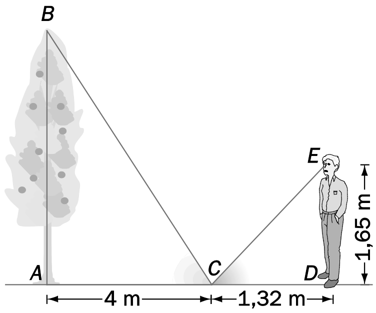
5.6. **Con este método, Eupalinos supo en qué dirección se debía excavar para no desviarse a izquierda ni a derecha. Pero ¿cómo hizo para que los mineros no se desviaran hacia arriba ni hacia abajo, es decir, para saber en todo momento que estaban cavando en una horizontal perfecta? Juntaos por equipos y proponed varias soluciones. (La altitud sobre el nivel del mar de los puntos *A* y *B* es la misma.)**

En la parte inferior de la galería había una línea horizontal que indicaba el nivel exacto que debía seguirse en la excavación. Así se consiguió una pendiente bastante regular del 0,4 %. Para corregir posibles errores y asegurarse de que los dos túneles se encontraban, Eupalinos hizo que aumentaran el techo de uno de ellos y que en el otro mantuvieran el techo y rebajaran el suelo.

Mide tu entorno > Distancias inaccesibles

Hace unos años, el abuelo Esteban plantó un árbol en su jardín. Desde entonces, cada año mide su altura y lleva un control de su crecimiento.

Para ello utiliza un método muy ingenioso: pone un espejo tumbado a 4 metros del pie del árbol y se aleja en línea recta hasta que consigue ver el punto más alto del árbol reflejado en el espejo. A continuación mide la distancia que hay entre su posición y el espejo, y mediante semejanza deduce la altura del árbol. ¿Cómo lo hace?



5.1. **¿Cómo son el ángulo de reflexión y el ángulo de incidencia que se forman en el espejo?**

El ángulo de incidencia y el de reflexión en una superficie plana son iguales.

5.2. **Razona por qué los dos triángulos de la figura son semejantes.**

Porque tienen dos ángulos iguales, el de incidencia y el de reflexión, y los dos rectos.

5.3. **Si los ojos del abuelo están a 1,65 metros del suelo, ¿cuál es la altura del árbol?**

$$\frac{1{,}65}{1{,}32} = \frac{A}{4} \Rightarrow A = 4 \cdot \frac{1{,}65}{1{,}32} = 5 \text{ m}$$

5.4. **¿A qué distancia del espejo tuvo que colocarse el abuelo cuando el árbol medía 3,75 metros?**

$$\frac{1{,}65}{x} = \frac{3{,}75}{4} \Rightarrow x = 4 \cdot \frac{1{,}65}{3{,}75} = 1{,}76 \text{ m}$$

5.5. **Hay otras muchas formas tradicionales de medir distancias inaccesibles. Investiga en qué consisten el método del pintor y el del leñador.**

El método del pintor consiste en colocar el pincel (u otro objeto) vertical frente a su vista, de forma que tape completamente el objeto del que se desea aproximar la altura. Conociendo la distancia a la que se encuentra el pincel y la distancia al objeto, se puede aplicar el teorema de Tales. Véase la actividad 62 de la página 91, donde se detalla el método.

El método del leñador consiste en imaginar que el objeto a medir cae al suelo.

- Con una varita de cualquier longitud y a una buena distancia del objeto a medir, se extiende el brazo completamente, sosteniendo la varita vertical, y se mueve de modo que con un ojo abierto se vea su punta tocando la del objeto.
- Ahora se mueve la mano hacia abajo, deslizándola por la varita hasta que coincida con la base del objeto.
- Sin mover el cuerpo, se gira lentamente la varita, desde la posición vertical a la horizontal.
- En esta posición se toma nota del sitio exacto donde la punta de la varita parece tocar el suelo.
- Se mide con pasos la distancia desde la base del objeto hasta este último punto, longitud que corresponde a la altura que se desea conocer.

5.6. **Escoge un elemento de altura inaccesible de tu entorno (un árbol, tu instituto, una farola) y mídelo utilizando el método del abuelo Esteban.**

Respuesta abierta.

Mide tu entorno > Distancias inaccesibles

Comienza esta actividad realizando un experimento: tienes que pedir a varios familiares o amigos que dibujen en una hoja un rectángulo que "sea bonito". Así, sin más explicación. Al día siguiente llévalos a clase de Matemáticas.

Calcula entonces el cociente entre el largo y el ancho de cada rectángulo. Como si de un truco de magia se tratara, los valores obtenidos serán próximos a 1,62.

Esta es una aproximación a la razón áurea, de la que ya habrás oído hablar. Ahora descubrirás su relación con muchos rectángulos que te serán familiares.

5.1. **Coloca dos DNI o tarjetas de crédito como ves en la figura. Observa que si trazas una recta que va desde el extremo inferior izquierdo al superior derecho del DNI que está horizontal, la recta pasa también por el extremo superior derecho del DNI que está vertical.**

a) ¿Crees que esto sucede en cualquier rectángulo? Compruébalo con otro.

b) ¿Qué relación debe haber entre los lados del rectángulo para que esto ocurra?

c) Si el lado más corto midiese 1 cm, ¿cuánto mediría el largo? Calcula la razón $\dfrac{\textbf{lado largo}}{\textbf{lado corto}}$.

a) No

b) Se deben formar dos triángulos rectángulos semejantes en posición de Tales y, por tanto, si llamamos *a* al lado largo y *b* al corto, se debe cumplir que $\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{a}{b}$ o, lo que es lo mismo, $1+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$. Llamando *x* a la razón $\dfrac{a}{b}$ tenemos que $1+\dfrac{1}{x}=x$; resolviendo $x^2 - x - 1 = 0$ tenemos que $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1{,}62$.

c) Si el corto mide 1, el largo mide 1,62. También se puede obtener usando $\dfrac{a+1}{a}=\dfrac{a}{1}$ y resolviendo la ecuación de 2.º grado anterior.

La razón entre los lados es la razón áurea, y un rectángulo que cumple esta proporción entre sus lados se llama rectángulo áureo. Esta proporción está relacionada con nuestra percepción de la belleza y aparece tanto en la naturaleza como en numerosas expresiones artísticas desde la Antigüedad.

5.2. **Busca en tu entorno al menos cinco objetos rectangulares que cumplan la proporción áurea. (¡El DNI ya no vale!).**

Tarjetas de crédito

Décimo de lotería de Navidad

Algunas banderas

Algunos sobres

Algunos cromos

El logotipo de Disney, de Toyota y de otras muchas empresas…

5.3. Busca información en internet sobre la historia de la razón áurea y elabora una cronología en la que figuren al menos:

- **Diez personajes históricos que la descubrieron o utilizaron y las fechas en las que vivieron.**
- **Cinco obras de arte que la contengan y su fecha de creación.**

Personajes históricos:

- Fidias (490-430 a. C.). Esculpió las estatuas del Partenón utilizando una proporción que más tarde fue considerada como el número áureo.
- Platón (427-347 a. C.). Sus cinco sólidos platónicos tenían relación con la proporción áurea.
- Euclides (300-265 a. C.). Define el número áureo en *Los elementos*. Demostró que este número no puede ser descrito como la razón de dos números enteros, es decir, es irracional.
- Fibonacci (1170-1250). Descubrió la sucesión que lleva su nombre y que está muy relacionada con el número áureo.
- Luca Pacioli. En 1509 publica su libro *La proporción divina*, en el que plantea cinco razones por las que considera apropiado considerar divino el número áureo.
- Alberto Durero (1471-1528). En 1525 publica *Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas*, donde describe cómo trazar con regla y compás la espiral basada en la sección áurea.
- Johannes Kepler (1571-1630). Encontró la relación entre el número áureo y la sucesión de Fibonacci.
- Charles Bonnet (1720-1793). Descubrió que las estructuras en espiral en la naturaleza seguían la sucesión de Fibonacci.
- Martin Ohm (1792-1872). Propuso el nombre de número de oro para esta proporción en 1835.
- Mark Barr (siglo XX). Sugiere la letra griega phi (φ) como símbolo de la razón áurea, por ser la inicial del nombre del escultor griego Fidias.

Obras de arte:

- Gran Pirámide de Guiza (c. 1570 a. C.)
- Partenón de Atenas (siglo V a. C.)
- Catedral de Notre-Dame de París (1345)
- *Hombre de Vitruvio* (1847), *La Gioconda* o *La Mona Lisa* (1503)…, de Leonardo da Vinci
- *La muchacha en la ventana* (1925), *Leda atómica* (1949)…, de Salvador Dalí

5.4. Averigua la relación que hay entre la sucesión de Fibonacci y la razón áurea, y descríbela con tus propias palabras.

Si F_n es el término general de la sucesión de Fibonacci, el cociente $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ tiende al número áureo cuando n tiende a infinito.

5.5. La razón áurea también aparece en la naturaleza, especialmente en relación con la sucesión de Fibonacci.

Busca cinco ejemplos en los que esto ocurra (una pista: espirales).

- La distancia entre las espirales de caracolas, los helechos, las piñas…
- La relación entre la altura del ser humano y la altura del ombligo.
- La relación entre el grosor de las ramas principales y el tronco de un árbol.
- La relación entre la cantidad de abejas macho y abejas hembra en un panal.
- La relación entre la distancia del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos.

5.6. Juntaos por equipos, poned en común toda la información obtenida y elaborad una presentación para contarla a la clase. Debe contener el desarrollo matemático de la razón áurea y los ejemplos más originales que hayáis encontrado.

Respuesta abierta.