5 Polinomios

ACTIVIDADES INICIALES

5.I. Imagina la situación: dos equipos de mineros excavan desde puntos opuestos de una montaña y tienen que encontrarse. Haz un esquema, di qué mediciones harías tú y propón una solución al problema de Eupalinos.

Pregunta abierta.

Se les puede guiar en su razonamiento indicándoles el uso de algún instrumento sencillo, como la brújula, el nivel…

5.II. Localiza la isla de Samos y fíjate en el nombre de sus principales ciudades. Una te recordará a un famoso matemático; averigua qué relación guarda con la isla.

Samos es una isla griega cuya capital es Vathy.

Una de sus poblaciones es Pythagorio. Es un pintoresco centro turístico, dado que es un punto de partida para muchas excursiones marinas por la isla. Su nombre hace referencia a Pitágoras, el gran matemático del siglo VI a. C. nacido en Samos.

5.III. Heródoto cita el túnel de Eupalinos como una de las tres obras más grandiosas del mundo griego. ¿Cuáles son las otras dos?

Las otras dos obras son el muelle y el templo de Samos.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

5.1. Actividad resuelta.

5.2. Los lados de un cuadrilátero miden 4, 8, 9 y 15 centímetros, respectivamente.

¿Cuánto miden los lados de un cuadrilátero de perímetro 54 cm semejante al anterior?

La razón de semejanza es igual a la razón de los perímetros: $k = \frac{54}{4+8+9+15} = \frac{54}{36} = 1{,}5$

Por tanto:

El homólogo del lado de 4 cm mide $4 \cdot 1{,}5 = 6$ cm.

El homólogo del lado de 8 cm mide $8 \cdot 1{,}5 = 12$ cm.

El homólogo del lado de 9 cm mide $9 \cdot 1{,}5 = 13{,}5$ cm.

El homólogo del lado de 15 cm mide $15 \cdot 1{,}5 = 22{,}5$ cm.

5.3. (TIC) Si la masa de una plancha de hierro es de 6,5 kg, ¿qué masa tendrá otra plancha del mismo metal y grosor si su ancho y su largo son el triple que los de la primera?

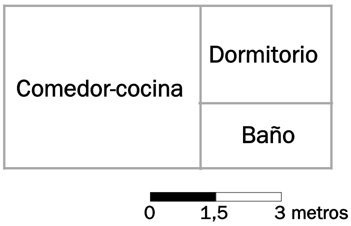
La razón de semejanza es $k = 3$. La razón de las áreas será $k^2 = 9$.

Al mantenerse el grosor, la masa de la segunda plancha será nueve veces la masa de la primera:

$$9 \cdot 6{,}5 = 58{,}5 \text{ kg}$$

5.4. Actividad resuelta.

5.5. El siguiente plano representa la distribución de un pequeño estudio.



a) Halla las dimensiones reales del comedor-cocina.

b) Calcula el área total del estudio.

c) Halla el porcentaje de la superficie que corresponde al dormitorio respecto del total.

a) Según la escala gráfica, 1,5 cm del plano equivalen a 3 m en la realidad, por lo que 1 cm del plano se corresponde con 2 metros en la realidad.

Las dimensiones del comedor-cocina son:

$2{,}3 \cdot 2 = 4{,}6$ m $\quad$ $1{,}9 \cdot 2 = 3{,}8$ m

b) El área total del estudio será:

$S_T = (3{,}8 \cdot 2) \cdot (1{,}9 \cdot 2) = 28{,}88\ \text{m}^2$

c) $S_D = (1{,}5 \cdot 2) \cdot (1{,}1 \cdot 2) = 6{,}6\ \text{m}^2 \Rightarrow \dfrac{6{,}6}{28{,}88} \cdot 100 = 22{,}85\ \%$

5.6. (TIC) La distancia más corta entre Córdoba y Valencia es de 421 kilómetros. ¿A qué distancia se encuentran sus representaciones en un mapa a escala 1:1 500 000?

En el mapa, un centímetro representa 15 km de la realidad.

La distancia que separa a las ciudades en el mapa es $\dfrac{421}{15} = 28{,}07$ cm.

5.7. (TIC) La superficie de España es de 504 645 kilómetros cuadrados. ¿Qué área ocuparía en un mapa a escala 1:5 000 000?

En el mapa, un centímetro representa 50 km de la realidad, y un centímetro cuadrado representa 2500 km^2 de la realidad.

El área de España en el mapa es $\dfrac{504\,645}{2500} = 201{,}86\ \text{cm}^2$.

5.8. (TIC) Un arquitecto quiere representar un edificio con una planta de 150 por 50 metros en un DIN-A2 (que mide 59,4 por 42 centímetros).

¿Qué escala le recomendarías?

La medida de 150 m debe caber en 59,4 cm.

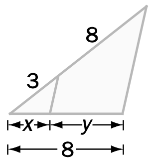
Por tanto, la escala podría ser: $\dfrac{15000}{59{,}4} = 252{,}5 \rightarrow$ Escala 1:255.

5.9. Actividad interactiva.

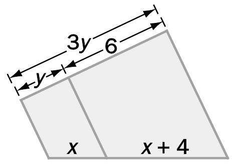
5.10. Actividad resuelta.

5.11. Calcula los lados desconocidos de las figuras.

a)



b)



a) $\frac{3}{x} = \frac{3+8}{8} \Rightarrow x = \frac{24}{11}$

$y = 8 - x = 8 - \frac{24}{11} = \frac{64}{11}$

b) $3y = y + 6 \Rightarrow y = 3$

$\frac{3}{x} = \frac{6}{x+4} \Rightarrow 3x + 12 = 6x \Rightarrow x = 4$

5.12. (TIC) Juan mide 1,75 metros y proyecta, en un momento dado, una sombra de 1,4 metros.

a) Calcula la sombra que proyecta en ese instante un árbol de 4 metros de altura.

b) Halla la altura de Elisa si en ese momento proyecta una sombra de 1,35 metros.

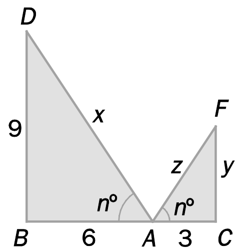
a) $\frac{1{,}75}{1{,}40} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{1{,}40 \cdot 4}{1{,}75} = 3{,}2$ m

b) $\frac{1{,}75}{1{,}40} = \frac{x}{1{,}35} \Rightarrow x = \frac{1{,}35 \cdot 1{,}75}{1{,}40} = 1{,}69$ m

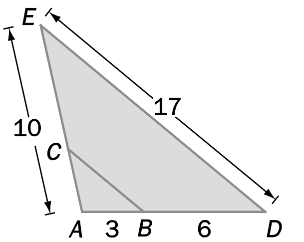
5.13. Actividad resuelta.

5.14. Razona si los triángulos siguientes son semejantes, indica los criterios utilizados y calcula los lados desconocidos.

a)



b)



CB y *ED* son paralelos

a) $\frac{9}{y} = \frac{6}{3} \Rightarrow y = 4{,}5$ cm

$\frac{9}{x} = \frac{y}{z} \Rightarrow 9z = 4{,}5x \Rightarrow x = 2z$

$x = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117}$ cm

$z = \frac{\sqrt{117}}{2}$ cm

b) $\frac{3}{AC} = \frac{6+3}{10} \Rightarrow AC = \frac{10}{3}$ cm

$\frac{9}{17} = \frac{3}{BC} \Rightarrow BC = \frac{17}{3}$ cm

$CE = 10 - \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$ cm

5.15. ¿Los triángulos interior y exterior de un cartabón son semejantes? Razona tu respuesta.

Sí, ya que los lados que los forman son paralelos y, por tanto, los ángulos correspondientes son iguales.

5.16. ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

a) Dos triángulos isósceles siempre son semejantes.

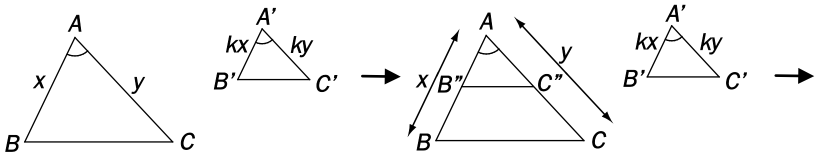
b) Un triángulo rectángulo con un ángulo de 30º es semejante a otro con un ángulo de 60º.

a) No, ya que los ángulos no tienen por qué ser iguales.

b) Sí, ya que, en ambos casos, los ángulos son de 90º, 30º y 60º.

5.17. Siguiendo un razonamiento análogo al de la teoría, demuestra los criterios 2 y 3 de semejanza de triángulos.

Segundo criterio de semejanza de triángulos: Si dos triángulos tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales, los triángulos son semejantes.



Los triángulos *ABC* y *A'B'C'* verifican que $\hat{A} = \hat{A}'$ y:

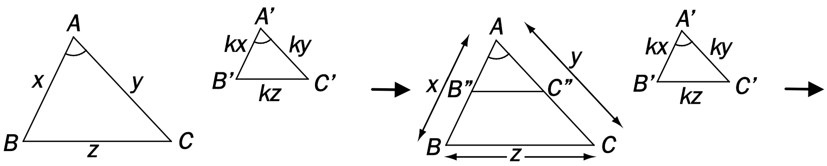
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Sobre el lado *AB*, se lleva *B*" de forma que *A'B'* = *AB"*, y sobre el lado *AC*, el punto *C*" tal que *A'C'* = *AC"*.
Se traza el segmento *B"C"*, que resulta paralelo a *BC*, ya que se cumple el teorema de Tales.

- Los triángulos *AB"C"* y *A'B'C'* son iguales por tener dos lados iguales y un ángulo igual.
- Los triángulos *ABC* y *AB"C"* están en posición de Tales y, por tanto, son semejantes.

En consecuencia, los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son también semejantes.

Tercer criterio de semejanza de triángulos: Si dos triángulos tienen los tres lados proporcionales, los triángulos son semejantes



Los triángulos *ABC* y *A'B'C'* verifican que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Sobre el lado *AB* se lleva *B'* de forma que *A'B'* = *AB"*, y sobre el lado *AC*, el punto *C"*, tal que *A'C'* = *AC"*.
Se traza el segmento *B"C"*, que resulta paralelo a *BC*, ya que se cumple el teorema de Tales.

- Los triángulos *AB"C"* y *A'B'C'* son iguales, ya que tienen los tres lados iguales.
- Los triángulos *ABC* y *AB"C"* están en posición de Tales y, por tanto, son semejantes.

En consecuencia, los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son también semejantes.

5.18. Actividad resuelta.

5.19. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 7,5 metros, y su proyección sobre la hipotenusa, 4,5. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

Se aplica el teorema del cateto: $7{,}5^2 = 4{,}5 \cdot a \Rightarrow a = \frac{7{,}5^2}{4{,}5} = 12{,}5$ cm.

5.20. En un triángulo rectángulo, los catetos miden 27 y 36 centímetros, respectivamente.

a) Halla las medidas de la hipotenusa y de las proyecciones de los catetos sobre ella.

b) Halla el valor de la altura sobre la hipotenusa.

a) Por el teorema de Pitágoras: $a^2 = 27^2 + 36^2 = 2025 \Rightarrow a = \sqrt{2025} = 45$ cm.

Gracias al teorema del cateto se calculan las proyecciones sobre la hipotenusa:

$m = \frac{27^2}{45} = 16{,}2$ cm $\qquad$ $n = \frac{36^2}{45} = 28{,}8$ cm

b) Gracias al teorema de la altura se calcula su medida:

$h^2 = m \cdot n = 16{,}2 \cdot 28{,}8 = 466{,}56 \Rightarrow h = \sqrt{466{,}56} = 21{,}6$ cm

5.21. (TIC) En un triángulo rectángulo, la hipotenusa y un cateto miden 40 y 24 centímetros, respectivamente. Halla el otro cateto, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa y la altura sobre ella.

Por el teorema de Pitágoras: $b^2 = 40^2 - 24^2 = 1024 \Rightarrow b = \sqrt{1024} = 32$ cm.

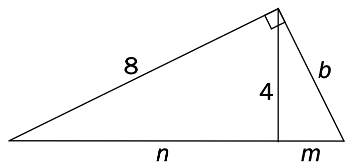
Con el teorema del cateto se calculan las proyecciones sobre la hipotenusa:

$m = \dfrac{24^2}{45} = 14{,}4$ cm $\qquad n = \dfrac{32^2}{45} = 25{,}6$ cm

Con el teorema de la altura se calcula su medida:

$h^2 = m \cdot n = 14{,}4 \cdot 25{,}6 = 368{,}64 \Rightarrow h = \sqrt{368{,}64} = 19{,}2$ cm

5.22. Un cateto de un triángulo rectángulo mide 8 centímetros, y la altura sobre la hipotenusa, 4. Halla el área del triángulo.



Por el teorema de la altura: $16 = m \cdot n \Rightarrow m = \dfrac{16}{n}$

Por el teorema del cateto:

$64 = n \cdot (m + n) \Rightarrow 64 = n \cdot \left(\dfrac{16}{n} + n\right) = 16 + n^2 \Rightarrow n^2 = 48 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$;

$m = \dfrac{16}{4\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = m + n = 4\sqrt{3} + \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$

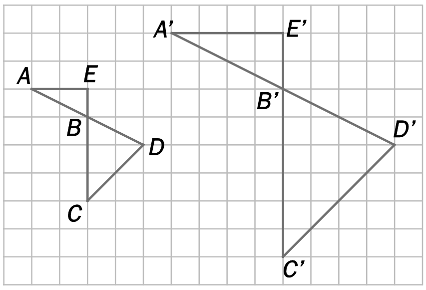
Superficie = $\dfrac{a \cdot 4}{2} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3} \cdot 2 = \dfrac{32\sqrt{3}}{3}$ cm^2

5.23. Actividad interactiva.

EJERCICIOS

Figuras semejantes. Triángulos semejantes

5.24. Comprueba que las siguientes figuras son semejantes y calcula la razón de semejanza.



Todos los ángulos homólogos son iguales, ya que los lados que los forman son paralelos.

Por otra parte, los lados correspondientes son proporcionales, ya que:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'B'}{DB} = \frac{B'E'}{BE} = \frac{E'A'}{EA} = 2$$

Por tanto, las figuras son semejantes con razón 2.

5.25. Las siguientes parejas de triángulos son semejantes. Calcula la razón de semejanza y los valores de los lados desconocidos.

a) (3, 4, 6) y (4,5; *x*, *y*) centímetros

b) (*x*, 4, 3) y (2, 2, *y*) centímetros

c) (2, *x*, 6) e (*y*, 2*x*, *z*) centímetros

a) La razón de semejanza es $\frac{4,5}{3} = 1,5$. Por tanto:

$\frac{x}{4} = 1,5 \Rightarrow x = 4 \cdot 1,5 = 6$ $\qquad$ $\frac{y}{6} = 1,5 \Rightarrow y = 6 \cdot 1,5 = 9$

b) La razón de semejanza es $\frac{2}{4} = 0,5$. Por tanto:

$\frac{2}{x} = 0,5 \Rightarrow x = \frac{2}{0,5} = 4$ $\qquad$ $\frac{y}{3} = 0,5 \Rightarrow y = 3 \cdot 0,5 = 1,5$

c) La razón de semejanza es $\frac{2x}{x} = 2$. Por tanto:

$\frac{y}{2} = 2 \Rightarrow y = 2 \cdot 2 = 4$ $\qquad$ $\frac{z}{6} = 2 \Rightarrow z = 6 \cdot 2 = 12$

En este caso, el valor de *x* puede ser cualquier número real con la única restricción de que con él se pueda formar efectivamente triángulo, es decir, $4 < x < 8$.

5.26. En los siguientes casos se conocen las medidas de dos ángulos de cada uno de los dos triángulos. Indica cuáles son semejantes y cuáles no.

a) 50º, 40º y 90º, 40º

b) 50º, 40º y 40º, 30º

c) 40º, 40º y 100º, 40º

a) El tercer ángulo del primer triángulo debe medir $180° - 50° - 40° = 90°$. Por tanto, los dos triángulos tienen todos sus ángulos iguales y son semejantes.

b) El tercer ángulo del primer triángulo debe medir $180° - 50° - 40° = 90°$. Por tanto, los dos triángulos tienen sus ángulos diferentes y no son semejantes.

c) El tercer ángulo del primer triángulo debe medir $180° - 40° - 40° = 100°$. Por tanto, los dos triángulos tienen todos sus ángulos iguales y son semejantes.

5.27. El perímetro de un triángulo equilátero mide 30 centímetros.

a) Halla las medidas de los lados de un triángulo equilátero semejante a él si la razón de semejanza es $k = \frac{1}{2}$.

b) ¿Cuál es la razón de sus áreas?

a) Lado = 10 cm. $l' = l \cdot k = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ cm

b) La razón entre las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza:

$$\frac{A'}{A} = k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

5.28. (TIC) Calcula las longitudes de los lados de un triángulo semejante a otro que tiene por lados 3, 12 y 10 centímetros si la razón de semejanza es $k = \frac{25}{4}$.

$k = \frac{25}{4}$ es la razón de semejanza. Por tanto:

$a' = a \cdot k = 3 \cdot \frac{25}{4} = \frac{75}{4} = 18{,}75$ cm

$b' = b \cdot k = 12 \cdot \frac{25}{4} = 75$ cm

$c' = c \cdot k = 10 \cdot \frac{25}{4} = \frac{125}{2} = 62{,}5$ cm

5.29. La arista de un cubo mide 8 metros. Halla la medida de la arista de otro cubo semejante si la razón de sus volúmenes es $k = \frac{1}{27}$.

La razón entre los volúmenes es k^3: $\frac{V'}{V} = k^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$ es la razón de semejanza.

Por tanto: $a' = a \cdot k = 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}67$ cm

5.30. Los catetos de un triángulo rectángulo isósceles miden 30 centímetros. Calcula el perímetro de un triángulo semejante a él con razón de semejanza $k = \frac{1}{6}$.

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide: $x = \sqrt{30^2 + 30^2} = \sqrt{1800}$ cm.

Por tanto, el perímetro mide $p = 2 \cdot 30 + \sqrt{1800} = 60 + \sqrt{1800}$ cm.

$$\frac{p'}{p} = k = \frac{1}{6} \Rightarrow p' = \frac{1}{6} \cdot \left(60 + \sqrt{1800}\right) = \frac{60 + \sqrt{1800}}{6} = 10 + 5\sqrt{2} = 17{,}07 \text{ cm}$$

5.31. (TIC) Las medidas de los lados de un pentágono son 3, 7, 8, 10 y 12 centímetros, respectivamente. Calcula las medidas de los lados de otro pentágono semejante al anterior y tal que:

a) Su lado mayor mida 18 centímetros. **b) Su perímetro sea de 60 centímetros.**

a) La razón de semejanza es igual a la razón entre los lados mayores: $k = \frac{18}{12} = 1{,}5$.

Por tanto, los lados homólogos miden:

Del lado de 3 cm: $3k = 3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$ cm. Del lado de 8 cm: $8k = 8 \cdot 1{,}5 = 12$ cm.

Del lado de 7 cm: $7k = 7 \cdot 1{,}5 = 10{,}5$ cm. Del lado de 10 cm: $10k = 10 \cdot 1{,}5 = 15$ cm.

b) Se trata del mismo pentágono del apartado anterior.

5.32. (TIC) Las medidas de un rectángulo son 3 y 5 centímetros. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior y tal que su perímetro mida 40 centímetros.

La razón de semejanza es igual a la razón de los perímetros: $k = \frac{40}{3+5+3+5} = \frac{40}{16} = 2{,}5$.

Por tanto, los lados homólogos miden:

Del lado de 3 cm: $3k = 3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$ cm. Del lado de 5 cm: $5k = 5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5$ cm.

5.33. (TIC) Las medidas de un rectángulo son 3 y 5 centímetros. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior y tal que su área mida 21,6 centímetros cuadrados.

La razón de semejanza es igual a la raíz cuadrada de la razón de las áreas: $k = \sqrt{\frac{21{,}6}{3 \cdot 5}} = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$.

Por tanto, los lados homólogos miden:

Del lado de 3 cm: 3k = 3 · 1,2 = 3,6 cm. Del lado de 5 cm: 5k = 5 · 1,2 = 6 cm.

5.34. (TIC) Un triángulo rectángulo tiene por catetos 5 y 12 centímetros. Halla la hipotenusa de otro triángulo semejante al anterior sabiendo que su área es de 46,875 centímetros cuadrados.

La hipotenusa del triángulo inicial mide $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ cm.

El área del triángulo inicial mide $S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ cm}^2$.

La razón entre las áreas vale $k^2 = \frac{46{,}875}{30} = 1{,}5625$.

La razón de semejanza de los dos triángulos será $k = \sqrt{1{,}5625} = 1{,}25$.

La hipotenusa del segundo triángulo medirá 13k = 13 · 1,25 = 16,25 cm.

5.35. ¿Verdadero o falso? Razona tu respuesta.

a) Todos los cuadrados son semejantes.
b) Todos los rectángulos son semejantes.
c) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
d) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.
e) Todos los triángulos isósceles son semejantes.
f) Todos los triángulos que son a la vez rectángulos e isósceles son semejantes.
g) Todos los pentágonos regulares son semejantes.
h) Los ángulos de dos triángulos semejantes son proporcionales.
i) Si dos triángulos rectángulos tienen cada uno un ángulo de 66º, son semejantes.
j) Dos triángulos rectángulos con los catetos proporcionales son semejantes
k) Los polígonos iguales son semejantes con razón de semejanza 1.
l) Todas las circunferencias son semejantes.

a) Verdadero. Todos los ángulos son rectos y los lados son proporcionales.
b) Falso. Aunque todos los ángulos son iguales, los lados no tienen por qué ser proporcionales. Por ejemplo, los rectángulos de lados 1 y 2 cm y 1 y 3 cm.
c) Verdadero. Todos los ángulos son de 60° y, por tanto, iguales, y los lados correspondientes son proporcionales ya que en cada triángulo los lados son iguales.
d) Falso. Ni siquiera han de tener los ángulos iguales.
e) Falso. Ni siquiera han de tener los ángulos iguales.
f) Verdadero. Los ángulos correspondientes son iguales, ya que en todos los casos miden 90°, 45° y 45°, y los lados correspondientes son proporcionales, pues son de la forma $x, \quad x, \quad x\sqrt{2}$.
g) Verdadero. Todos los ángulos son iguales a $\frac{(5-2) \cdot 180}{5} = 108°$ (recuérdese que la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2) \cdot 180°$). Por otra parte, los lados correspondientes son proporcionales, ya que en cada pentágono regular los lados son iguales.
h) Sí, con constante de proporcionalidad 1 (los ángulos homólogos son iguales).
i) Sí, ya que los ángulos son iguales: 90º, 66º y 22º.
j) Sí, ya que tiene un ángulo igual (90º), y los lados que lo forman, proporcionales.
k) Sí, los ángulos homólogos son iguales, y los lados homólogos, proporcionales con constante de proporcionalidad 1.
l) Sí, tienen la misma forma.

5.36. Elige la respuesta correcta.

a) Dos triángulos son semejantes y la razón de semejanza es 3. Uno de ellos tiene un área de 6 unidades cuadradas. ¿Cuántas corresponden al área del otro?

i) 18 ii) 54 iii) 108

b) Dos prismas son semejantes y la razón de semejanza es 2. Uno de ellos tiene un volumen de 10 unidades cúbicas. ¿Cuántas corresponden al volumen del otro?

i) 40 ii) 200 iii) 80

a) Razón de semejanza: $k = 3$; razón de áreas: $k^2 = 9$.

La respuesta es el apartado ii, ya que 54 $u^2 = 9 \cdot 6$ u^2.

b) Razón de semejanza: $k = 2$; razón de volúmenes $k^3 = 8$.

La respuesta es el apartado iii, ya que 80 $u^3 = 8 \cdot 10$ u^3.

5.37. Si *A* y *B* son dos pentágonos regulares, ¿cuáles de las siguientes igualdades son ciertas?

a) $\dfrac{\textbf{Perímetro de } A}{\textbf{Perímetro de } B} = \dfrac{\textbf{Apotema de } A}{\textbf{Apotema de } B}$

b) $\dfrac{\textbf{Perímetro de } A}{\textbf{Perímetro de } B} = \dfrac{\textbf{Área de } A}{\textbf{Área de } B}$

c) $\dfrac{\textbf{Perímetro de } A}{\textbf{Perímetro de } B} = \dfrac{\textbf{Diagonal de } A}{\textbf{Diagonal de } B}$

a y c son verdaderas, ya que relacionan longitudes.

b es falsa, ya que la razón de semejanza de las superficies es el cuadrado de la razón de longitudes.

5.38. Un patio circular tiene 200 metros cuadrados de superficie. Si el radio se triplicase, ¿se triplicaría también el área? Razona tu respuesta.

Área $A = \pi \cdot r^2 = 200$ m^2 Área $A = \pi \cdot (3r)^2 = 9\pi r^2 = 9 \cdot 200 = 1800$ m^2

La superficie se multiplica por 3^2, que es la razón de las áreas de figuras con razón de semejanza 3.

5.39. (TIC) Se quiere una fotocopia reducida de un dibujo rectangular de 35 por 15 centímetros. ¿Qué porcentaje de reducción se debe aplicar para que el área de la copia sea de 250 centímetros cuadrados?

El área del dibujo inicial es $35 \cdot 15 = 525$ cm^2

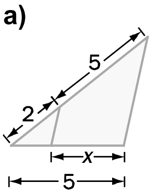
Razón de las áreas $\dfrac{250}{525} = 0{,}4762$. Razón de semejanza $\sqrt{0{,}4762} = 0{,}69$

El porcentaje de reducción será del 31 %.

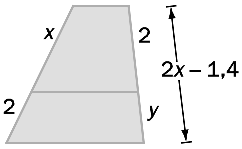
Teorema de Tales

5.40. (TIC) Calcula el valor de las variables en las siguientes figuras.

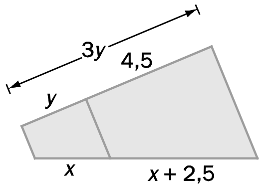
a)



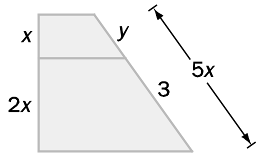
b)



c)



d)



a) $\dfrac{2+5}{5} = \dfrac{5}{x} \Rightarrow 7x = 25 \Rightarrow x = \dfrac{25}{7} = 3{,}57$

b) $y + 4{,}5 = 3y \Rightarrow 2y = 4{,}5 \Rightarrow y = \dfrac{4{,}5}{2} = 2{,}25$

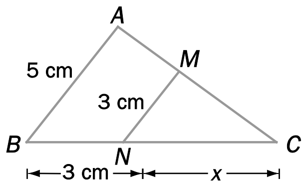
$\dfrac{x}{2{,}25} = \dfrac{x+2{,}5}{4{,}5} \Rightarrow 4{,}5x = 2{,}25x + 5{,}625 \Rightarrow x = 2{,}5$

c) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{x+2}{2x-1{,}4} \Rightarrow 2x^2 - 1{,}4x = 2x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 3{,}4x - 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3{,}4+6{,}6}{4} = 2{,}5$

$\dfrac{2{,}5}{2} = \dfrac{2}{y} \Rightarrow y = \dfrac{4}{2{,}5} = 1{,}6$

d) $\dfrac{3x}{5x} = \dfrac{2x}{3} \Rightarrow x = 0{,}9; \quad y = 5 \cdot 0{,}9 - 3 = 1{,}5$

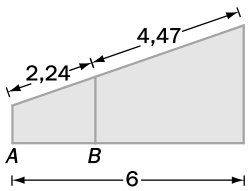
5.41. Si los segmentos *AB* y *MN* son paralelos, halla la medida del lado *BC*.



$\dfrac{5}{3} = \dfrac{x+3}{x} \Rightarrow 5x = 3x + 9 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$ cm

BC = 3 + 4,5 = 7,5 cm

5.42. Calcula la longitud del segmento *AB*.



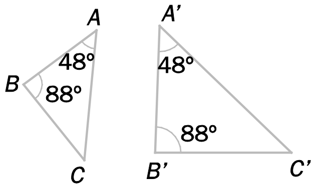
Aplicando el teorema de Tales:

$\dfrac{2{,}24+4{,}47}{6} = \dfrac{2{,}24}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{6 \cdot 2{,}24}{6{,}71} = \dfrac{13{,}44}{6{,}71} = 2$

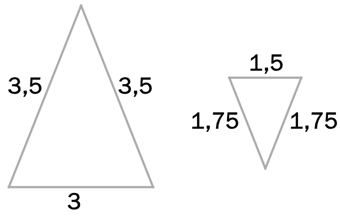
Criterios de semejanza de triángulos

5.43. Utilizando alguno de los criterios de semejanza, demuestra que las siguientes parejas de triángulos son semejantes.

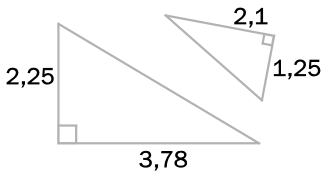
a)



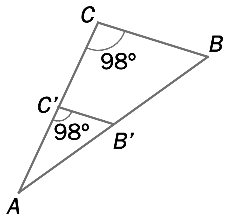
c)



b)



d)



a) Primer criterio: los triángulos tienen dos ángulos iguales.

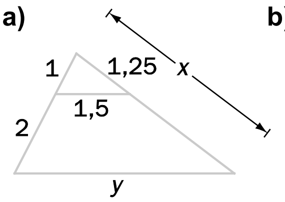
b) Segundo criterio: los triángulos tienen un ángulo igual, y los lados que lo forman, proporcionales, ya que $\frac{3{,}78}{2{,}1} = \frac{2{,}25}{1{,}25} = 1{,}8$.

c) Tercer criterio: todos los lados son proporcionales, ya que: $\frac{3}{1{,}5} = \frac{3{,}5}{1{,}75} = \frac{3{,}5}{1{,}75} = 2$.

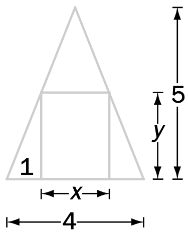
d) Son semejantes, ya que están en posición de Tales.

5.44. Utilizando los criterios de semejanza, encuentra triángulos semejantes en las siguientes figuras y calcula el valor de los segmentos desconocidos.

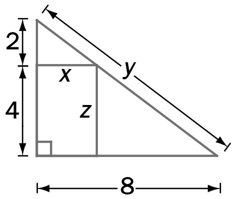
a)



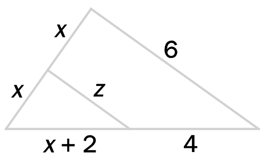
b)



c)



d)



a) $\frac{1}{1{,}5} = \frac{3}{y} \Rightarrow y = 4{,}5$ $\qquad \frac{1}{1{,}25} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 3{,}75$

b) $\frac{5}{4} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2{,}5$ $\qquad x = 2$

c) $\frac{2}{x} = \frac{6}{8} \Rightarrow x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ $\qquad y = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ $\qquad z = 4$

d) $$\begin{cases} \frac{x}{x+2} = \frac{2x}{x+6} \Rightarrow \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x+6} \Rightarrow x + 6 = 2x + 4 \Rightarrow x = 2 \\ \frac{x}{z} = \frac{2x}{6} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{2}{6} \Rightarrow z = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$