

# 4 Inecuaciones y sistemas

## ACTIVIDADES INICIALES

- 4.I. **¿Por qué girar a la derecha tiene tantas ventajas para un camión? ¿Cómo es posible que haciendo más kilómetros ahorren tiempo y combustible?**

Los giros en la carretera suponen un peligro para cualquier vehículo. Dado que en muchos países se debe circular por el carril derecho de la calzada, el sentido natural del giro es a la derecha, ya que el carril derecho es el más lento. Para los conductores, estas maniobras son las habituales y, por tanto, las que se realizan con mayor facilidad y seguridad. En muchos casos, en los giros a la derecha no hay necesidad de hacer un *stop*.

- 4.II. **Elabora el itinerario más corto posible que pasa por todas las aulas de Secundaria de tu centro, comenzando en la tuya.**

Pregunta abierta.

- 4.III. **¿En qué consisten los problemas del viajante y del cartero chino? Búscalos y enúncialos con tus propias palabras.**

Problema del cartero chino: Un cartero debe repartir la correspondencia a cada una de las manzanas de casas de su distrito, siendo la oficina de correos su punto de partida y fin. Encuentra una ruta óptima (distancia total recorrida mínima).

Es decir, diseñar un recorrido que pase por todos los segmentos.

Problema del viajante chino: Imaginad que sois viajeros de comercio y que debéis visitar 15 ciudades durante un viaje de negocios. Ciudades que están diseminadas por el mapa de forma aleatoria. La cuestión es: ¿cuál es el camino que conduce a cada ciudad una sola vez recorriendo la menor distancia posible?

Es decir, diseñar un recorrido que pase por todos los puntos.

## ACTIVIDADES PROPUESTAS

- 4.1. **Plantea como ecuaciones o inecuaciones.**

- Tres cafés cuestan más de 4 euros.
  - Cuatro vasos de agua son menos de un litro.
  - Un bollo cuesta 1,20 euros y por tres cafés y un bollo he pagado 5,70 euros.
  - El perímetro de un triángulo equilátero es mayor que 10 centímetros.
- $3x > 4$
  - $4x < 1$
  - $1,20 + 3x = 5,70$
  - $3x > 10$

- 4.2. **Actividad interactiva.**

4.3. Partiendo siempre de la desigualdad  $6x - 12 < 18$ .

a) Copia y completa como en el ejemplo:

<u>Restar 6</u>	$6x - 18$	$<$	$12$
	$12x - 24$	$\square$	$36$
	$3x - 6$	$\square$	$9$
	$-2x + 4$	$\square$	$-6$

b) Halla las soluciones de la inecuación  $6x - 12 < 18$ .

- a) Multiplicar por 2       $12x - 24 < 36$   
 Dividir entre 2       $3x - 6 < 9$   
 Dividir entre  $-3$        $-2x + 4 > -6$
- b)  $x < 5$

4.4. (TIC) Resuelve las inecuaciones siguientes.

- a)  $3(x - 5) - 5 > 7(x + 1) - (2x + 3)$       d)  $\left(\frac{x+1}{3}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right) + 2(x+4) \geq \frac{x(1+x)}{6}$
- b)  $x - 2(x + 3) - 1 > 2 - 4(1 - 5x) - (x + 4)$       e)  $\frac{3x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} \leq \frac{x+5}{6}$
- c)  $\frac{5x-2}{2} - 3(x-1) \geq -\frac{x+6}{10}$       f)  $2\left(\frac{x-1}{3}\right) - \frac{2(x-1)+7}{6} < 3(x+2)$

a)  $3(x - 5) - 5 > 7(x + 1) - (2x + 3) \Rightarrow 3x - 15 - 5 > 7x + 7 - 2x - 3 \Rightarrow -2x > 24 \Rightarrow x < -12 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x \in (-\infty, -12)$

b)  $x - 2(x + 3) - 1 > 2 - 4(1 - 5x) - (x + 4) \Rightarrow x - 2x - 6 - 1 > 2 - 4 + 20x - x - 4 \Rightarrow -20x > 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x < -\frac{1}{20} \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{20}\right)$

c)  $\frac{5x-2}{2} - 3(x-1) \geq -\frac{x+6}{10} \Rightarrow 5(5x-2) - 30(x-1) \geq -x-6 \Rightarrow 25x - 10 - 30x + 30 \geq -x - 6 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 26 \geq 4x \Rightarrow \frac{13}{2} \geq x \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{13}{2}\right]$

d)  $\left(\frac{x+1}{3}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right) + 2(x+4) \geq \frac{x(1+x)}{6} \Rightarrow x^2 - 1 + 12x + 48 \geq x + x^2 \Rightarrow 11x \geq -47 \Rightarrow x \geq -\frac{47}{11} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x \in \left[-\frac{47}{11}, +\infty\right)$

e)  $\frac{3x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} \leq \frac{x+5}{6} \Rightarrow 3(3x-1) - 2(2x+3) \leq x+5 \Rightarrow 9x - 3 - 4x - 6 \leq x+5 \Rightarrow 4x \leq 14 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x \leq \frac{7}{2} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$

f)  $2\left(\frac{x-1}{3}\right) - \frac{2(x-1)+7}{6} < 3(x+2) \Rightarrow 4(x-1) - 2(x-1) - 7 < 18(x+2) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 4x - 4 - 2x + 2 - 7 < 18x + 36 \Rightarrow -45 < 16x \Rightarrow -\frac{45}{16} < x \Rightarrow x \in \left(-\frac{45}{16}, +\infty\right)$

- 4.5. Isa ha sacado un 6,2 y un 8,1 en dos exámenes de Matemáticas. ¿Entre qué valores tiene que estar la nota del tercer examen si quiere que su media sea al menos 7,5?

Si  $x$  es la nota del tercer examen, tenemos  $x \leq 10$ . Por otro lado,  $\frac{6,2+8,1+x}{3} \geq 7,5$ , es decir,  $x \geq 8,2$ .

Por tanto, la nota debe estar entre 8,2 y 10.

- 4.6. Resuelve  $\frac{2x-3}{5} - \frac{x+1}{4} \geq \frac{x-1}{10}$  sabiendo que 15 es la solución de la ecuación asociada.

El conjunto de soluciones puede ser  $(-\infty, 15]$  o  $[15, +\infty)$ . Como para  $x = 0$  obtenemos que

$-\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{17}{20} < -\frac{1}{10}$ , el conjunto de soluciones no puede contener el cero, luego es  $[15, +\infty)$ .

- 4.7. ¿Qué condiciones debe cumplir el tercer lado de un triángulo si los otros dos lados miden 2 y 5 centímetros, respectivamente?

Como la suma de dos lados cualesquiera de un triángulo debe ser mayor que el tercer lado, si llamamos  $x$  al tercer lado, se deben cumplir las condiciones  $x + 2 > 5$  y  $2 + 5 > x$  (pues  $x + 5 > 2$  se cumple siempre) que nos da el intervalo  $(3, 7)$ , es decir, el tercer lado debe medir más de 3 y menos de 7 centímetros.

- 4.8. Actividad interactiva.

- 4.9. (TIC) Determina las soluciones de estas inecuaciones.

- |                               |                            |                               |
|-------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| a) $2x^2 < 6$                 | e) $2x^2 + 5x > 8 - x$     | i) $x^4 + 6x^3 + 11x^2 < -6x$ |
| b) $x^4 + 4 < 3x^2$           | f) $x^2 + 1 < 2x$          | j) $2x^3 - 4x^2 > 5x(1 + x)$  |
| c) $3x^2 - 2x \geq 2x^2 + 15$ | g) $x^3 + 4x^2 \geq 6 - x$ | k) $15x^2 + 8 \geq x^4 - 8$   |
| d) $1 - x^2 \leq -3$          | h) $x^4 - 3x^3 \leq 10x^2$ | l) $x^4 - 5x^2 + 6 \leq 0$    |

- a) Las raíces del polinomio son  $-\sqrt{3}$  y  $\sqrt{3}$ , que determinan los intervalos  $(-\infty, \sqrt{3})$ ,  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  y  $(\sqrt{3}, +\infty)$ . Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .
- b) El polinomio no tiene raíces, por lo que queda determinado un único intervalo en la recta,  $(-\infty, +\infty)$ . Eligiendo un valor para  $x$  se obtiene que la inecuación no tiene solución.
- c) Las raíces del polinomio son  $-3$  y  $5$ , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$ .
- d) Las raíces del polinomio son  $-2$  y  $2$ , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ .
- e) Las raíces del polinomio son  $-4$  y  $1$ , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$ .
- f) La raíz del polinomio es  $1$ , que determina dos intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene que la inecuación no tiene solución.
- g) Las raíces del polinomio son  $-3$ ,  $-2$  y  $1$ , que determinan cuatro intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $[-3, -2] \cup [1, +\infty)$ .
- h) Las raíces del polinomio son  $-2$ ,  $0$  y  $5$ , que determinan cuatro intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $[-2, 5]$ .

- i) Las raíces del polinomio son  $-3, -2, -1$  y  $0$ , que determinan cinco intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-3, -2) \cup (-1, 0)$ .
- j) Las raíces del polinomio son  $-\frac{1}{2}, 0$  y  $5$ , que determinan cuatro intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (5, +\infty)$ .
- k) Las raíces del polinomio son  $-4$  y  $4$ , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $[-4, 4]$ .
- l) Las raíces del polinomio son  $-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$  y  $\sqrt{3}$ , que determinan cinco intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $[-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ .

**NOTA:** Hay un error en el enunciado del apartado l del libro.

**4.10. (TIC) Resuelve estas inecuaciones racionales.**

a)  $\frac{x-4}{x+5} > 0$

d)  $\frac{x^2-9}{x^2-4x+4} \leq 0$

b)  $\frac{x^2}{x+1} \geq 0$

e)  $\frac{x-2}{x^3-4x} \leq 0$

c)  $\frac{x+3}{x+2} < 6$

f)  $\frac{x-2}{x+2} < \frac{3-2x}{2x-1}$

- a) Las raíces del numerador y del denominador son  $-5$  y  $4$ , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-\infty, -5) \cup (4, +\infty)$ .
- b) Las raíces del numerador y del denominador son  $-1$  y  $0$ , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-1, +\infty)$ .
- c)  $\frac{x+3}{x+2} < 6 \Rightarrow \frac{-5x-9}{x+2} < 0$ . Las raíces del numerador y del denominador son  $-2$  y  $-\frac{9}{5}$ , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-\infty, -2) \cup (-\frac{9}{5}, +\infty)$ .
- d) Las raíces del numerador y del denominador son  $-3, 2$  y  $3$ , que determinan cuatro intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $[-3, 2) \cup (2, 3]$ .
- e) Las raíces del numerador y del denominador son  $-2, 0$  y  $2$ , que determinan cuatro intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-2, 0)$ .
- f)  $\frac{x-2}{x+2} < \frac{3-2x}{2x-1} \Rightarrow \frac{4(x^2-x-1)}{(x+2)(2x-1)} < 0$ . Las raíces del numerador y del denominador son  $-2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}$  y  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , que determinan cinco intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ .

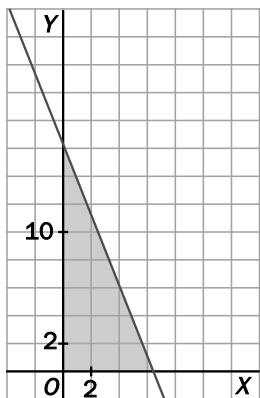
**4.11. Actividad interactiva.**

4.12. Actividad resuelta.

4.13. (TIC) El número de empleados,  $x$ , de una fábrica y las toneladas de fertilizante que fabrica,  $y$ , se relacionan por la inecuación:  $30x + 12y \leq 200$ .

- a) Resuelve gráficamente la inecuación.
- b) ¿Es aceptable la solución en la que  $y = 16$ ?

a)



- b) No, pues en ese caso sería  $x \leq \frac{4}{15} < 1$ , que no puede ser el número de empleados.

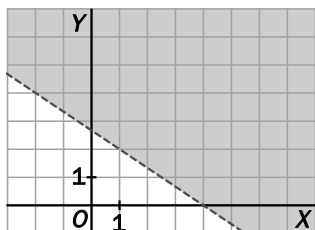
4.14. (TIC) Resuelve gráficamente estas inecuaciones y calcula tres soluciones de cada una.

a)  $2x + 3y > 8$

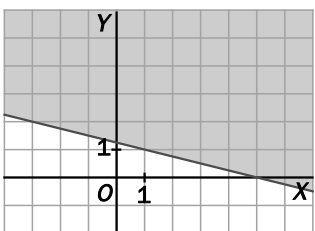
b)  $x + 4y \geq 5$

c)  $5x - 6y \leq 0$

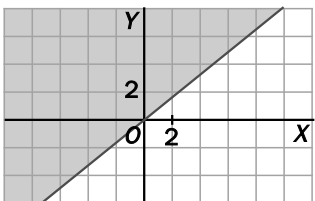
a)



b)



c)



4.15. Actividad interactiva.

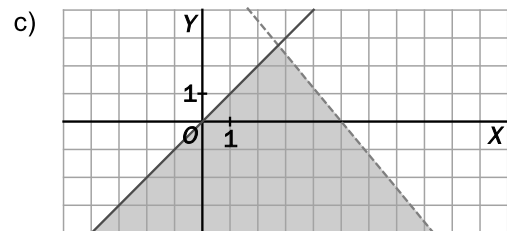
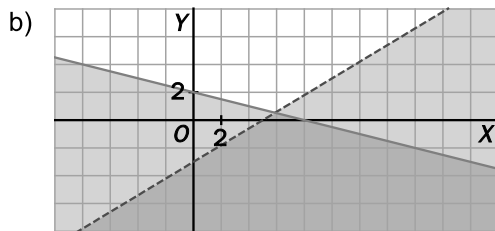
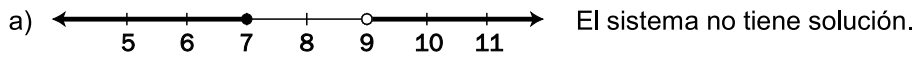
4.16. Actividad resuelta.

4.17. (TIC) Resuelve gráficamente los siguientes sistemas.

a)  $\begin{cases} x+1 > 10 \\ x-2 \leq 5 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 3x-5y > 15 \\ x+4y \leq 8 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 6x+5y < 30 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$

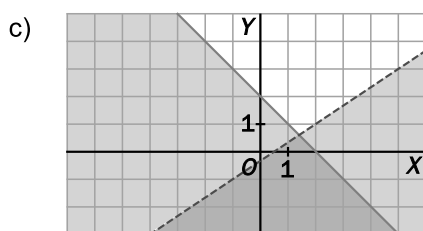
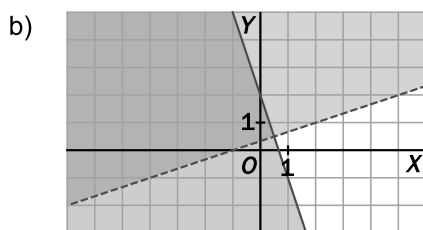
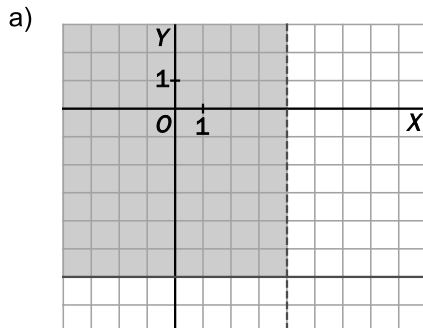


4.18. (TIC) Halla la solución de estos sistemas.

a)  $\begin{cases} y \geq -6 \\ x < 4 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x-3y < -1 \\ 3x+y \leq 2 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ 2x-3y > 1 \end{cases}$



EJERCICIOS

Desigualdades e inecuaciones

4.19. Partiendo siempre de la desigualdad  $4 - 5x > x$ , copia y completa como en el ejemplo.

<u>Sumar <math>5x</math></u>	$4 > 6x$
_____	$1 - 5x \square x - 3$
_____	$10x - 8 \square - 2x$
Restar 3	$1 - 5x > x - 3$
Multiplicar por $-2$	$10x - 8 \square - 2x$

4.20. Transforma en desigualdades estas frases.

- a) Elena necesita correr por debajo de 16 segundos para clasificarse en una prueba.
  - b) En algunas atracciones del parque temático exigen una altura superior a 1,20 metros.
  - c) Pasó el kilómetro 25 de la A-2, pero aún no llegó al 45.
- a)  $x < 16$
  - b)  $x > 1,20$
  - c)  $25 < x < 45$

4.21. Di si son ciertas o falsas estas afirmaciones.

- a) Una inecuación, o no tiene solución, o tiene una, o tiene infinitas.
  - b) La solución de  $x + 5 \leq 3$  es una semirrecta.
  - c) Una inecuación del tipo  $x + a > b$ , con  $a$  y  $b$  números reales, a veces no tiene solución.
- a) Falsa. Por ejemplo, la inecuación  $(x - 1)^2 \cdot (x - 2)^2 \leq 0$  tiene dos soluciones:  $x = 1$  y  $x = 2$ .
  - b) Verdadera. La semirrecta es  $(-\infty, -2]$ .
  - c) Falsa. La inecuación tiene como solución la semirrecta  $(b - a, +\infty)$ .

4.22. Relaciona en tu cuaderno cada desigualdad con su equivalente y con la operación en los dos miembros que pasa de una a otra.

Desigualdad A	Operación	Desigualdad B
$-4 < 7$	Dividir entre $-2$	$-4 < 5$
$12 > 6$	Sumar $-5$	$-6 < -3$
$\frac{-4}{3} < \frac{10}{6}$	Multiplicar por 3	$-9 < 2$

Desigualdad A	Operación	Desigualdad B
$-4 < 7$	Dividir entre $-2$	$-4 < 5$
$12 > 6$	Sumar $-5$	$-6 < -3$
$\frac{-4}{3} < \frac{10}{6}$	Multiplicar por 3	$-9 < 2$

4.23. ¿Son equivalentes estas inecuaciones?

a)  $-2x \leq 14$  y  $x \leq 7$

b)  $\frac{x}{2} > -5$  y  $x > 10$

a) No son equivalentes.

b) No son equivalentes.

4.24. Si  $a < b$  y  $c \leq d$ , copia y completa con los símbolos  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$  y  $\geq$  en los casos en que sea posible. Si no lo es, explica por qué.

a)  $b - 10 \square a - 10$

c)  $a - d \square b - c$

e)  $-a + 3 \square 3 - b$

b)  $a + c \square b + d$

d)  $2c + 3 \square 2d + 5$

f)  $a \cdot c \square b \cdot d$

a)  $b - 10 \square a - 10$

c)  $a - d \square b - c$

e)  $-a + 3 \square 3 - b$

b)  $a + c \square b + d$

d)  $2c + 3 \square 2d + 5$

f) No se puede decidir. Por ejemplo, si  $a = -3$ ,  $b = 1$ ,  $c = -5$  y  $d = 2$ , tenemos que  $a \cdot c > b \cdot d$ , pero si  $a = c = 1$  y  $b = d = 2$ , tenemos  $a \cdot c < b \cdot d$ .

Resolución de inecuaciones de primer grado

4.25. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa sus soluciones.

a)  $7x - 2(1 - 3x) \leq 2x + 3$

c)  $5x - \frac{2}{3} < 4(3x - 6) - 2x$

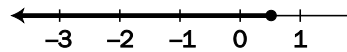
e)  $\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} \geq \frac{5}{6} - x$

b)  $\frac{2(5x+1)}{3} \leq -4(x-3) + \frac{5}{2}$

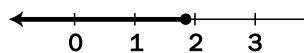
d)  $5 > \frac{3x+1}{2}$

f)  $4x - 1 \geq \frac{8x-5}{2}$

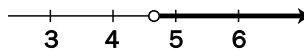
a)  $7x - 2(1 - 3x) \leq 2x + 3 \Rightarrow 7x - 2 + 6x \leq 2x + 3 \Rightarrow 11x \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{5}{11} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{5}{11}\right]$



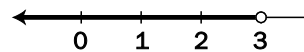
b)  $\frac{2(5x+1)}{3} \leq -4(x-3) + \frac{5}{2} \Rightarrow 20x + 4 \leq -24x + 72 + \frac{5}{2} \Rightarrow 44x \leq 83 \Rightarrow x \leq \frac{83}{44} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{83}{44}\right]$



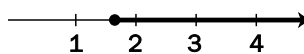
c)  $5x - \frac{2}{3} < 4(3x - 6) - 2x \Rightarrow 15x - 2 < 36x - 72 - 6x \Rightarrow 70 < 15x \Rightarrow x > \frac{14}{3} \Rightarrow x \in \left(\frac{14}{3}, +\infty\right)$



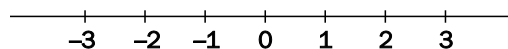
d)  $5 > \frac{3x+1}{2} \Rightarrow 10 > 3x+1 \Rightarrow 9 > 3x \Rightarrow x < 3 \Rightarrow x \in (-\infty, 3)$



e)  $\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} \geq \frac{5}{6} - x \Rightarrow 2x - 3x - 3 \geq 5 - 6x \Rightarrow 5x \geq 8 \Rightarrow x \geq \frac{8}{5} \Rightarrow x \in \left[\frac{8}{5}, +\infty\right)$



f)  $4x - 1 \geq \frac{8x-5}{2} \Rightarrow 8x - 2 \geq 8x - 5 \Rightarrow 0 \geq -3$ , que es cierto para todo  $x$ .



4.26. Completa con  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$  y  $\geq$  para que las semirrectas dadas sean las soluciones de las inecuaciones.

a)  $\frac{2x-1}{3} - x \boxed{\dots} 3x - 2 \quad \left[ \frac{1}{2}, +\infty \right)$

b)  $\frac{x-4}{2} \boxed{\dots} \frac{x}{2} + \frac{1}{6}(x+1) \quad (-\infty, -13)$

a)  $\frac{2x-1}{3} - x \boxed{\leq} 3x - 2$

b)  $\frac{x-4}{2} \boxed{>} \frac{x}{2} + \frac{1}{6}(x+1)$

Inecuaciones polinómicas de grado superior. Inecuaciones racionales

4.27. Halla las soluciones de estas inecuaciones.

a)  $(5x - 2)^2 \leq 0$

b)  $(2x + 4)^3 > 0$

a) Como un cuadrado nunca es negativo, la única solución es que la base sea cero,  $x = \frac{2}{5}$ .

b) Un cubo es positivo si lo es su base; por tanto, la solución es  $x > -2 \Rightarrow (-2, +\infty)$ .

4.28. (TIC) Resuelve las siguientes inecuaciones.

a)  $x^2 - 2x - 4 \leq 0$

c)  $(3x - 1)(-5x + 2) \geq 0$

b)  $-10x^2 + 17x - 3 \leq 0$

d)  $-7(4x + 1)(-x + 2) < 0$

a) Las raíces del polinomio son  $1 - \sqrt{5}$  y  $1 + \sqrt{5}$ , que determinan tres intervalos en la recta real. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $[1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}]$ .

b) Las raíces del polinomio son  $\frac{1}{5}$  y  $\frac{3}{2}$ , que determinan tres intervalos en la recta real. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ .

c) Las raíces del polinomio son  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{2}{5}$ , que determinan tres intervalos en la recta real. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$ .

d) Las raíces del polinomio son  $-\frac{1}{4}$  y  $2$ , que determinan tres intervalos en la recta real. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$ .

4.29. (TIC) Resuelve las siguientes inecuaciones racionales.

a)  $\frac{x+5}{x+2} \leq 0$

c)  $\frac{x+4}{x-3} \leq 0$

e)  $\frac{x+3}{x^2} > 0$

b)  $\frac{3-x}{x+2} < 0$

d)  $\frac{x^2-1}{x} \leq 0$

f)  $\frac{(x-2)(x+5)}{4x-6} \geq 0$

- a) Las raíces del numerador y del denominador son  $-5$  y  $-2$ , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $[-5, -2)$ .
- b) Las raíces del numerador y del denominador son  $-2$  y  $3$ , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ .
- c) Las raíces del numerador y del denominador son  $-4$  y  $3$ , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $[-4, 3)$ .
- d) Las raíces del numerador y del denominador son  $-1, 0$  y  $1$ , que determinan cuatro intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$ .
- e) Las raíces del numerador y del denominador son  $-3$  y  $0$ , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-3, 0) \cup (0, +\infty)$ .
- f) Las raíces del numerador y del denominador son  $-5, \frac{3}{2}$  y  $2$ , que determinan cuatro intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $[-5, \frac{3}{2}) \cup [2, +\infty)$ .

4.30. (TIC) Halla la solución de las siguientes inecuaciones polinómicas.

a)  $2x^4 + 5x^3 + 5x > x^2 + 3$

c)  $x^4 \leq 4x^2$

b)  $x^4 + 3x^3 - 7x < 3x^2 - 6$

d)  $-2(x-2)(x+3)^2 < 0$

a)  $2x^4 + 5x^3 + 5x > x^2 + 3 \Rightarrow 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x - 3 > 0$

Las raíces del polinomio son  $-3$  y  $\frac{1}{2}$ , que determinan tres intervalos en la recta real. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-\infty, -3) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ .

b)  $x^4 + 3x^3 - 7x < 3x^2 - 6 \Rightarrow x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6 < 0$

Las raíces del polinomio son  $-3, -2$  y  $1$ , que determinan cuatro intervalos en la recta real. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-3, -2)$ .

c)  $x^4 \leq 4x^2 \Rightarrow x^4 - 4x^2 \leq 0$

Las raíces del polinomio son  $-2, 0$  y  $2$ , que determinan cuatro intervalos en la recta real. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $[-2, 2]$ .

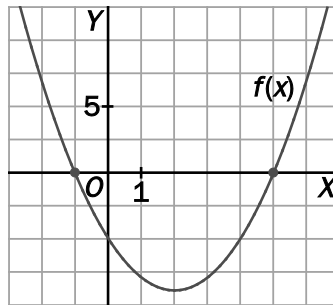
d) Como  $-2$  es siempre negativo y  $(x+3)^2$  es siempre positivo, debe ser  $x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$  y la solución es  $(2, +\infty)$ .

**NOTA:** Hay un error en el enunciado del apartado a del libro.

4.31. Halla en cada caso una inecuación polinómica cuya solución se corresponda con la dada.

- |                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| a) $[-3, +\infty)$    | c) $(-\infty, 2)$ |
| b) Sin solución       | d) $\{3\}$        |
| a) $x \geq -3$        |                   |
| b) $x^2 < 0$          |                   |
| c) $x < 2$            |                   |
| d) $(x - 3)^2 \leq 0$ |                   |

4.32. A partir de la gráfica de la función  $f(x) = (x - 5)(x + 1)$ , resuelve las inecuaciones.



- |                                      |                  |
|--------------------------------------|------------------|
| a) $f(x) > 0$                        | c) $f(x) < 0$    |
| b) $f(x) \geq 0$                     | d) $f(x) \leq 0$ |
| a) $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$ |                  |
| b) $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$ |                  |
| c) $(-1, 5)$                         |                  |
| d) $[-1, 5]$                         |                  |

4.33. (TIC) Comprueba que, aunque las siguientes ecuaciones tienen las mismas soluciones, no ocurre lo mismo con las inecuaciones asociadas.

- a)  $\frac{2x - 6}{x + 5} = 0$  y  $2x - 6 = 0$ ;  $\frac{2x - 6}{x + 5} < 0$  y  $2x - 6 < 0$
- b)  $\frac{3x - 5}{2x + 1} = 1$  y  $2x = 12$ ;  $\frac{3x - 5}{2x + 1} \geq 1$  y  $3x - 5 \geq 2x + 1$

Explica por qué ocurre esto.

- a) Ambas ecuaciones tienen solución  $x = 3$ , pero las soluciones de las inecuaciones son, respectivamente,  $(-5, 3)$  y  $(-\infty, 3)$ .
- b) La solución de las ecuaciones es  $x = 6$  en ambos casos, pero las soluciones de las inecuaciones son, respectivamente,  $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [6, +\infty)$  y  $[6, +\infty)$ .

Esto sucede porque para resolver una ecuación racional hay que tener en cuenta solo las raíces del numerador, pero para resolver una inecuación racional hay que tener en cuenta tanto las raíces del numerador como las del denominador.

4.34. (TIC) Escribe como una única fracción racional y resuelve las inecuaciones.

a)  $\frac{1+x}{2x+7} - \frac{1}{x-1} \geq 0$

c)  $\frac{x+1}{x} < \frac{x-2}{x+3}$

b)  $\frac{x}{x+2} \geq \frac{1}{x}$

d)  $\frac{2x-1}{x+1} - 1 > \frac{x-2}{3-x}$

a)  $\frac{1+x}{2x+7} - \frac{1}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{(2x+7)(x-1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-4)}{(2x+7)(x-1)} \geq 0$

Las raíces del numerador y del denominador son  $-\frac{7}{2}$ ,  $-2$ ,  $1$  y  $4$ , que determinan cinco intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-\infty, -\frac{7}{2}) \cup [-2, 1) \cup [4, +\infty)$ .

b)  $\frac{x}{x+2} \geq \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{(x+2)x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)x} \geq 0$

Las raíces del numerador y del denominador son  $-2$ ,  $-1$ ,  $0$  y  $2$ , que determinan cinco intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-\infty, -2) \cup [-1, 0) \cup [2, +\infty)$ .

c)  $\frac{x+1}{x} < \frac{x-2}{x+3} \Rightarrow \frac{x+1}{x} - \frac{x-2}{x+3} < 0 \Rightarrow \frac{6x+3}{x(x+3)} < 0$

Las raíces del numerador y del denominador son  $-3$ ,  $-\frac{1}{2}$  y  $0$ , que determinan cuatro intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-\infty, -3) \cup (-\frac{1}{2}, 0)$ .

d)  $\frac{2x-1}{x+1} - 1 > \frac{x-2}{3-x} \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} - 1 - \frac{x-2}{3-x} > 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 6x + 4}{(x+1)(x-3)} > 0 \Rightarrow \frac{2(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-3)} > 0$

Las raíces del numerador y del denominador son  $-1$ ,  $1$ ,  $2$  y  $3$ , que determinan cinco intervalos en la recta. Eligiendo un valor para  $x$  en cada uno de ellos se obtiene como solución  $(-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$ .

4.35. Escribe una inecuación para cada conjunto de soluciones.

a)  $(2, +\infty)$

c)  $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

b)  $(-3, 5)$

d)  $(-4, 0) \cup (3, 5)$

a)  $2x - 4 > 0$

b)  $(x + 3)(x - 5) < 0$

c)  $(x + 2)(x - 1) \geq 0$

d)  $x(x + 4)(x - 3)(x - 5) < 0$

4.36. Calcula en cada caso los valores de  $m$  para que se cumplan estas condiciones.

a) Que  $mx^2 - mx + 1 \leq 0$  tenga una sola solución.

b) Que  $x^4 + 4mx - 8m \leq 0$

a) Para que la inecuación tenga solo una solución, el polinomio  $mx^2 - mx + 1$  debe tener una única raíz (doble), es decir, debe ser  $m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0$  o  $m = 4$ .

Si  $m = 0$ , la inecuación queda  $1 \leq 0$ , lo que no es posible.

Por tanto, debe ser  $m = 4$ , quedando la inecuación  $4x^2 - 4x + 1 \leq 0 \Rightarrow (2x - 1)^2 \leq 0$ , que tiene como única solución  $x = \frac{1}{2}$ .

b) Nos piden calcular  $m$  para que la inecuación  $x^4 + 4mx - 8m \leq 0$  sea cierta para cualquier valor de  $x$ . Ahora bien, tomando  $x = 2$ , la inecuación quedaría  $16 \leq 0$ , que no es posible. Por tanto, no hay ningún valor de  $m$  que cumpla la condición dada.

**Nota:** Hay un error en el enunciado del apartado a del libro.

4.37. La inecuación  $-\frac{3}{x+4} < -5$  da lugar a dos inecuaciones, según que el denominador sea mayor o menor que 0. Encuentra todas sus soluciones.

Si  $x + 4 > 0$ , es decir, si  $x > -4$ , tenemos que  $-3 < -5(x + 4) \Rightarrow 17 < -5x \Rightarrow -\frac{17}{5} > x$ , obteniéndose la solución  $\left(-4, -\frac{17}{5}\right)$ .

Si  $x + 4 < 0$ , es decir, si  $x < -4$ , tenemos que  $-3 > -5(x + 4) \Rightarrow 17 > -5x \Rightarrow -\frac{17}{5} < x$ , con lo que no obtenemos soluciones, ya que las dos condiciones son incompatibles.

De este modo, la solución de la inecuación es  $\left(-4, -\frac{17}{5}\right)$ .

4.38. (TIC) Resuelve las siguientes inecuaciones transformándolas previamente en inecuaciones polinómicas.

a)  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq -2$

b)  $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 \leq 0$

a) Se supone que estamos tomando la raíz positiva, que siempre será mayor que  $-2$ ; por tanto, solo hace falta determinar cuándo existe la raíz, es decir, resolver la inecuación  $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ .

Como  $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ , la inecuación  $x^2 - 6x + 9 \geq 0$  es cierta para cualquier  $x$ , es decir, la solución es  $\mathbb{R}$ .

b)  $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 \leq 0 \Rightarrow 2 \cdot 2^{-2x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 \leq 0$ . Haciendo el cambio  $u = 2^{-x}$  obtenemos la inecuación polinómica  $2 \cdot u^2 - 7 \cdot u - 4 \leq 0$ , que tiene solución  $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ .

De este modo,  $-\frac{1}{2} < 2^{-x} < 4$ ; ahora bien, como  $2^{-x}$  es siempre positivo, realmente tenemos  $0 < 2^{-x} < 4$ , de donde  $x > -2$ , es decir, la solución es  $(-2, +\infty)$ .

Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

4.39. ¿En cuántas regiones divide al plano la recta  $y = 3x - 5$ ? Caracterízalas en forma de inecuaciones.

En dos regiones, que se corresponden con las inecuaciones  $y \geq 3x - 5$ ,  $y \leq 3x - 5$ .

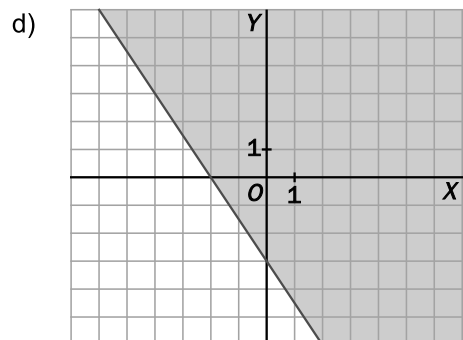
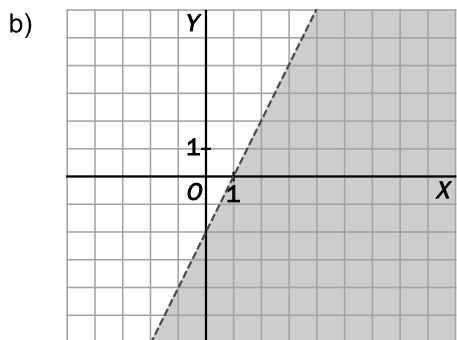
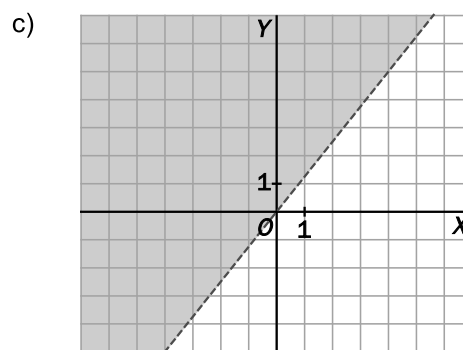
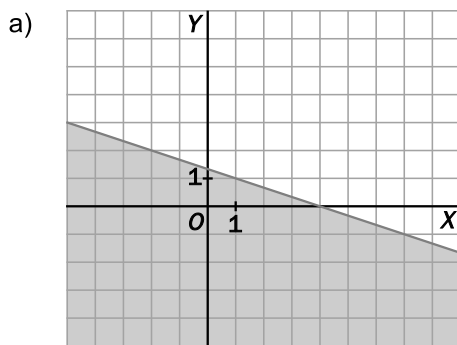
4.40. (TIC) Resuelve las siguientes inecuaciones.

a)  $x + 3y \leq 4$

b)  $x - \frac{y}{2} > 1$

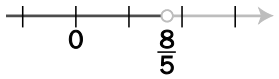
c)  $5x - 4y < 0$

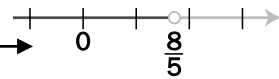
d)  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \geq -1$



Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

4.41. (TIC) Copia en tu cuaderno y une cada sistema con su solución.

Sistema	Solución
$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x+1 > 5 \end{cases}$	$-2 \leq x < -1$
$\begin{cases} 3x+4 < 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$	$(2, +\infty)$
$\begin{cases} -4x+3 \leq -1 \\ 5x-2 > 6 \end{cases}$	

Sistema	Solución
$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x+1 > 5 \end{cases}$	$-2 \leq x < -1$
$\begin{cases} 3x+4 < 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$	$(2, +\infty)$
$\begin{cases} -4x+3 \leq -1 \\ 5x-2 > 6 \end{cases}$	

4.42. (TIC) Encuentra, si existen, las soluciones de estos sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a)  $\begin{cases} 2x-3 > 5x-6 \\ x+2 \leq 2(x+11) \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 5(1-3x) > 8+3x \\ 3x-1 \geq 1-(x+2) \end{cases}$

b)  $\begin{cases} \frac{x}{2} \leq x+3 \\ 1-x > 4(x-1) \end{cases}$

d)  $\begin{cases} x \geq 15-2x \\ 10+2x \geq 6x-10 \end{cases}$

a)  $\begin{cases} 2x-3 > 5x-6 \\ x+2 \leq 2(x+11) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 > 3x \\ -20 \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 > x \\ -20 \leq x \end{cases} \Rightarrow [-20, 1)$

b)  $\begin{cases} \frac{x}{2} \leq x+3 \\ 1-x > 4(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq x \\ 5 > 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq x \\ 1 > x \end{cases} \Rightarrow [-6, 1)$

c)  $\begin{cases} 5(1-3x) > 8+3x \\ 3x-1 \geq 1-(x+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 > 18x \\ 4x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{6} > x \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{No tiene solución.}$

d)  $\begin{cases} x \geq 15-2x \\ 10+2x \geq 6x-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x \geq 15 \\ 20 \geq 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ 5 \geq x \end{cases} \Rightarrow x = 5$