Ecuaciones exponenciales

3.52. (TIC) Resuelve estas ecuaciones exponenciales.

a) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ **c)** $\sqrt[3]{128} = 4^{2x}$

b) $2^{x-1} + 2^{x+2} = 72$ **d)** $\sqrt[5]{81} = 3^{1-3x}$

a) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$; cambio $2^x = u \Rightarrow u^2 - 9u + 8 = 0 \Rightarrow$

$$u = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3 \\ u = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

b) $2^{x-1} + 2^{x+2} = 72 \Rightarrow 2^{x-1} + 2^3 \cdot 2^{x-1} = 72 \Rightarrow 9 \cdot 2^{x-1} = 72 \Rightarrow 2^{x-1} = 8 \Rightarrow 2^{x-1} = 2^3 \Rightarrow x = 4$

c) $\sqrt[3]{128} = 4^{2x} \Rightarrow 2^{\frac{7}{3}} = 2^{4x} \Rightarrow \dfrac{7}{3} = 4x \Rightarrow x = \dfrac{7}{12}$

d) $\sqrt[5]{81} = 3^{1-3x} \Rightarrow 3^{\frac{4}{5}} = 3^{1-3x} \Rightarrow \dfrac{4}{5} = 1 - 3x \Rightarrow x = \dfrac{1}{15}$

3.53. (TIC) Resuelve estas ecuaciones exponenciales.

a) $6^{3-x} = 216$ **d)** $4^x - 3 \cdot 4^{x+1} + 4^{x+2} = 20$

b) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$ **e)** $3^x\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$

c) $13^{2x} - 6 \cdot 13^x + 5 = 0$ **f)** $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$

a) $6^{3-x} = 216 \Rightarrow 6^{3-x} = 6^3 \Rightarrow 3 - x = 3 \Rightarrow x = 0$

b) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\dfrac{7}{3}\right)^{7x-3} \Rightarrow \left(\dfrac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\dfrac{3}{7}\right)^{-7x+3} \Rightarrow 3x - 7 = -7x + 3 \Rightarrow 10x = 10 \Rightarrow x = 1$

c) $13^{2x} - 6 \cdot 13^x + 5 = 0 \Rightarrow u = 13^x \Rightarrow u^2 - 6u + 5 = 0$

$$u = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = 5 \Rightarrow 13^x = 5 \Rightarrow \log_{13} 13^x = \log_{13} 5 \Rightarrow x = \log_{13} 5 = \dfrac{\log 5}{\log 13} \\ u = 1 \Rightarrow 13^x = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

d) $4^x - 3 \cdot 4^{x+1} + 4^{x+2} = 20 \Rightarrow 4^x - 12 \cdot 4^x + 16 \cdot 4^x = 20 \Rightarrow 5 \cdot 4^x = 20 \Rightarrow 4^x = 4 \Rightarrow x = 1$

e) $3^x\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\dfrac{1}{27}\right)^x \Rightarrow \dfrac{3^x}{3^{x-3}} = \dfrac{1}{3^{3x}} \Rightarrow 3^3 = 3^{-3x} \Rightarrow 3 = -3x \Rightarrow x = -1$

f) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950 \Rightarrow 10^2 \cdot 10^{x-2} - 5 \cdot 5^{x-2} \cdot 2^{x-2} = 950 \Rightarrow 95 \cdot 10^{x-2} = 950 \Rightarrow 10^{x-2} = 10$

$x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$

Sistemas de ecuaciones lineales

3.54. (TIC) Halla la solución de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 3y = 6 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

$13x = 13 \Rightarrow x = 1$ e $y = 2$

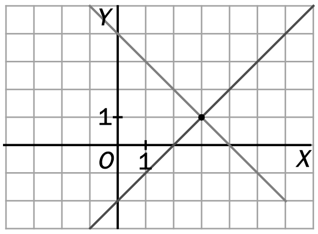
b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 15 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

$10x = 20 \rightarrow x = 2$ e $y = -1$

3.55. (TIC) Resuelve gráficamente estos sistemas.

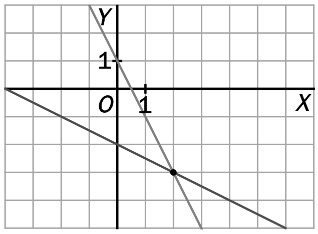
a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$

a)



Una solución: $x = 3$ e $y = -1$

b)



Una solución: $x = 2$ e $y = -3$

3.56. (TIC) Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} - \dfrac{2y}{3} = 6 \\ \dfrac{-x}{10} + \dfrac{5y}{6} = -6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3(-2x + 1) - 4y = 1 \\ 4x - 2(3y + 1) = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ \dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{4}y = 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 0 \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} - \dfrac{2y}{3} = 6 \\ \dfrac{-x}{10} + \dfrac{5y}{6} = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 10y = 90 \\ -3x + 25y = -180 \end{cases}$

$15y = -90 \rightarrow y = -6$ y $x = 10$

b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ \dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{4}y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 8x + 15y = 100 \end{cases} \Rightarrow 8(y + 1) + 15y = 100 \Rightarrow 23y = 92 \Rightarrow y = 4$ y $x = 5$

c) $\begin{cases} 3(-2x + 1) - 4y = 1 \\ 4x - 2(3y + 1) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x - 4y = -2 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12x - 8y = -4 \\ 12x - 18y = 30 \end{cases}$

$-26y = 26 \rightarrow y = -1$ y $x = 1$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 0 \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 24 \end{cases}$

$4x = 24 \rightarrow x = 6$ e $y = 4$

3.57. Añade una ecuación a $3x - 2y = 5$ para formar un sistema que:

a) No tenga solución.

b) Tenga infinitas soluciones.

c) Tenga una única solución. ¿Puede ser esta solución $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$? ¿Y podría ser $\begin{cases} x = 7 \\ y = 8 \end{cases}$?

a) $3x - 2y = 9$

b) $6x - 4y = 10$

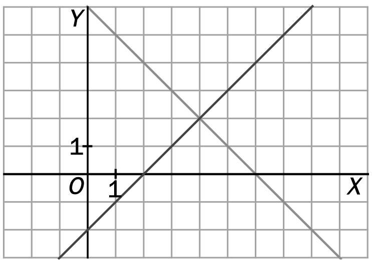
c) $x = 3$ e $y = 1$ nunca será solución porque no satisface la primera ecuación, $3x - 2y = 5$.

$x + y = 15$ da lugar a la solución $x = 7$ e $y = 8$.

3.58. Observa las siguientes gráficas.

¿A qué sistema están representando?

¿Cuál es la solución de dicho sistema?



$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 6 - x \end{cases} \Rightarrow x - 2 = 6 - x \Rightarrow x = 4$ e $y = 2$

Sistemas de ecuaciones de segundo grado

3.59. (TIC) Resuelve estos sistemas no lineales.

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 - xy = 5} \\ \boldsymbol{3x + y = 1} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \boldsymbol{5x^2 + y^2 = 25} \\ \boldsymbol{3x^2 - y^2 = -25} \end{cases}$ e) $\begin{cases} \boldsymbol{4x^2 - y^2 = -20} \\ \boldsymbol{xy = -12} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{(x - y)^2 = 49} \\ \boldsymbol{x^2 + 2xy + y^2 = 9} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 - xy + y^2 = 7} \\ \boldsymbol{x + y = 5} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 = 17} \\ \boldsymbol{x + xy + y = 9} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x^2 + xy = x \end{cases} \\ \hline 4x^2 = 5 + x \end{array} \Rightarrow 4x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{8} = \dfrac{1 \pm 9}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{4} \text{ y } y = 1 - 3 \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{-11}{4} \\ x = -1 \text{ y } y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ (x + y)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \pm 7 \\ x + y = \pm 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x = 10 \\ -2y = 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 5 \\ y = -2 \end{matrix}$ $\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ -2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = -7 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -4 \\ -2y = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = -7 \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -10 \\ -2y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{array}{l} \begin{cases} 5x^2 + y^2 = 25 \\ 3x^2 - y^2 = -25 \end{cases} \\ \hline 8x^2 \qquad = 0 \end{array} \to x = 0 \text{ y } y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 5$

d) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \quad \to x = 5 - y \end{cases} \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = -20 \\ xy = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-12}{y} \\ 4\dfrac{144}{y^2} - y^2 = -20 \end{cases} \Rightarrow 576 - y^4 = -20y^2 \Rightarrow y^4 - 20y^2 - 576 = 0$

$y^2 = \dfrac{20 \pm \sqrt{400 + 4 \cdot 576}}{2} = \dfrac{20 \pm 52}{2} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 36 \Rightarrow y = 6 \text{ y } x = -2,\ y = -6 \text{ y } x = 2 \\ y^2 = -16 \Rightarrow y \text{ no tiene solución.} \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + xy + y = 9 \to x = \dfrac{9 - y}{1 + y} \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{9 - y}{1 + y}\right)^2 + y^2 = 17 \Rightarrow (9 - y)^2 + y^2(1 + y)^2 = 17(1 + y)^2$

$81 - 18y + y^2 + y^2 + 2y^3 + y^4 = 17 + 34y + 17y^2 \Rightarrow y^4 + 2y^3 - 15y^2 - 52y + 64 = 0$

	1	2	–15	–52	64
1		1	3	–12	–64
	1	3	–12	–64	0

	1	3	–12	–64
4		4	28	64
	1	7	16	0

$y^4 + 2y^3 - 15y^2 - 52y + 64 = (y - 1)(y - 4)(y^2 + 7y + 16) \Rightarrow y = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 16}}{2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{-25}}{2} \Rightarrow$

No tiene más soluciones $\Rightarrow y = 1$ y $x = 4$ o $y = 4$ y $x = 1$.

3.60. (TIC) Halla la solución de estos sistemas.

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ y^2 - 2x^2 = 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 61 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 6 \\ x \cdot y = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} (x - y)^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \rightarrow y = 2x + 1 \\ y^2 - 2x^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow (2x+1)^2 - 2x^2 = 7 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4}{2}$

$x = 1$ e $y = 3$; $x = -3$ e $y = -5$

b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 6 \\ x \cdot y = 2 \quad \rightarrow x = \dfrac{2}{y} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{8}{y^3} + y^3 = 6 \Rightarrow 8 + y^6 = 6y^3 \Rightarrow y^6 - 6y^3 + 8 = 0$

$y^3 = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y^3 = 4 \Rightarrow y = \sqrt[3]{4} \text{ y } x = \dfrac{2}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2} \\ y^3 = 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{2} \text{ y } x = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 61 \\ x \cdot y = 12 \quad \rightarrow x = \dfrac{12}{y} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{144}{y^2} + y^2 = 25 \Rightarrow y^4 - 25y^2 + 144 = 0$

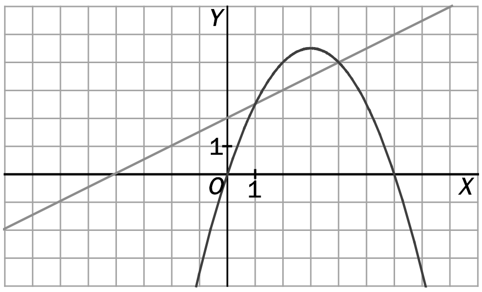
$y^2 = .\dfrac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \\ y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3 \end{cases}$

$y = 4$ y $x = 3$; $y = -4$ y $x = -3$; $y = 3$ y $x = 4$; $y = -3$ e $y = -4$

d) $\begin{cases} (x - y)^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y) = \pm 1 \\ (x - y)(x + y) = 7 \end{cases}$, quedan dos posibles sistemas:

$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \\ y = 3 \end{matrix}$ $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -4 \\ y = -3 \end{matrix}$

3.61. En la siguiente gráfica se han representado una recta y la parábola $y = \dfrac{-x^2 + 6x}{2}$. ¿A qué sistema no lineal están representando? Resuelve analíticamente dicho sistema.



$$\begin{cases} y = \dfrac{-x^2 + 6x}{2} \\ y = \dfrac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{-x^2 + 6x}{2} = \dfrac{1}{2}x + 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ y } y = 4 \\ x = 1 \text{ y } y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

3.62. (TIC) Resuelve el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 221 \\ xy = 70 \end{cases}$ de este modo:

1.º Multiplica por dos la segunda ecuación.

2.º Suma las ecuaciones.

3.º Resta la segunda ecuación de la primera.

4.º Resuelve el sistema obtenido.

5.º Escribe correctamente los cuatro sistemas que salen.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 221 \\ xy = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 221 \\ 2xy = 140 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 361 \\ x^2 + y^2 - 2xy = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 361 \\ (x-y)^2 = 81 \end{cases}$$

que da lugar a cuatro sistemas:

$\begin{cases} x + y = 19 \\ x - y = 9 \end{cases} \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = 5 \text{ y } x = 14$ $\quad\begin{cases} x + y = 19 \\ x - y = -9 \end{cases} \Rightarrow 2y = 28 \Rightarrow y = 14 \text{ y } x = 5$

$\begin{cases} x + y = -19 \\ x - y = 9 \end{cases} \Rightarrow 2y = -28 \Rightarrow y = -14 \text{ y } x = -5$ $\quad\begin{cases} x + y = -19 \\ x - y = -9 \end{cases} \Rightarrow 2y = -10 \Rightarrow y = -5 \text{ y } x = -14$

Sistemas exponenciales y logarítmicos

3.63. (TIC) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales.

a) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5^{x+2} - 4^y = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2^x + 5^y = 9 \\ 4 \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 41 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4 \cdot 2^x + 4 \cdot 5^y = 36 \\ 4 \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 41 \end{matrix}\right\}$

$-5^y = -5 \rightarrow y = 1 \text{ y } 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

b) $\left.\begin{matrix} 5^{x+2} - 4^y = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5 \cdot 5^{x+1} - 4^2 \cdot 4^{y-2} = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5 \cdot 5^{x+1} - 16 \cdot 4^{y-2} = -3 \\ -48 \cdot 5^{x+1} + 16 \cdot 4^{y-2} = 16 \end{matrix}\right\}$

$-43 \cdot 5^{x+1} = 13$

$5^{x+1} = \dfrac{-13}{43}$. No tiene solución.

3.64. (TIC) Halla las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.

a) $\begin{cases} 2\log x + \log y = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - 6y = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} 2\log x + \log y = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \log(x^2 \cdot y) = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 \cdot y = 10^5 \\ xy = 10^4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

Se divide la primera ecuación entre la segunda $\Rightarrow x = 10$; entonces, $y = 10^3 = 1000$.

b) $\left.\begin{matrix} \log x + \log y = 2 \\ x - 6y = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \log(x \cdot y) = 2 \\ x = 1 + 6y \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \cdot y = 10^2 \Rightarrow (1+6y)y = 100 \Rightarrow 6y^2 + y - 100 = 0$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2400}}{12} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \text{ y } x = 25 \\ y = \dfrac{-50}{12} = \dfrac{-25}{6} \text{ y } x = -24 \end{cases}$$

PROBLEMAS

3.65. Shalma vive en un poblado de Kenia y debe caminar hasta el poblado vecino para ir a la escuela. En la primera media hora recorre un cuarto del trayecto; en la media hora siguiente, dos quintos del trayecto restante, y todavía le quedan 4,5 kilómetros por recorrer.

¿A qué distancia se encuentra la escuela?

Llamamos x a la distancia de su casa a la escuela.

$$\frac{x}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3x}{4}=x-4{,}5 \Rightarrow \frac{x}{4}+\frac{6x}{20}=x-4{,}5 \Rightarrow 5x+6x=20x-90 \Rightarrow 9x=90 \Rightarrow x=10 \text{ km}$$

3.66. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su diagonal mide 15 centímetros, y su área, 108 centímetros cuadrados.

$$\begin{cases} x^2+y^2=15^2 \\ x\cdot y=108 \quad \rightarrow x=\dfrac{108}{y} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{108}{y}\right)^2+y^2=15^2 \Rightarrow \Rightarrow 108^2+y^4=225y^2 \Rightarrow y^4-225y^2+11664=0$$

$$y^2=\frac{225\pm\sqrt{225^2-4\cdot 11664}}{2}=\frac{225\pm 63}{2}\Rightarrow \begin{cases} y^2=144 \Rightarrow y=12 \text{ y } x=9 \\ y^2=81 \Rightarrow y=9 \text{ y } x=12 \end{cases}$$

Las soluciones negativas no las consideramos porque las dimensiones de un rectángulo tienen que ser positivas.

El rectángulo tendrá por dimensiones 9 × 12 cm.

3.67. De un rombo se sabe que su área es de 120 centímetros cuadrados y que la proporción entre las diagonales mayor y menor es 10:3.

Calcula la medida de las diagonales.

$$\begin{cases} \dfrac{Dd}{2}=120 \\ 3D=10d \rightarrow d=\dfrac{3D}{10} \end{cases} \Rightarrow D\frac{3D}{10}=240 \Rightarrow D^2=800 \Rightarrow D=20\sqrt{2} \text{ cm y } d=\frac{3\cdot 20\sqrt{2}}{10} \Rightarrow d=6\sqrt{2} \text{ cm}$$

3.68. Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Uno de ellos advirtió que los apretones de manos fueron 66. ¿Cuántas personas concurrieron a la reunión?

En la reunión hay x personas. Cada persona da la mano a $x - 1$ personas.

$$\frac{x(x-1)}{2}=66 \Rightarrow x(x-1)=132 \Rightarrow x^2-x-132=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(-132)}}{2}=\frac{1\pm 23}{2}\Rightarrow \begin{cases} x=12 \\ x=-11 \end{cases}$$

Concurrieron 12 personas.

3.69. Una ebanista quiere partir un listón de madera de 30 centímetros de longitud en tres trozos para construir una escuadra, de manera que el trozo de mayor longitud mida 13 centímetros.

¿Cuál es la longitud de los otros trozos?

$$\begin{cases} x+y+13=30 \rightarrow x=17-y \\ x^2+y^2=13^2 \end{cases} \Rightarrow (17-y)^2+y^2=169 \Rightarrow y^2-17y+60=0$$

$$y=\frac{17\pm\sqrt{289-4\cdot 60}}{2}=\frac{17\pm 7}{2}\Rightarrow \begin{cases} y=12 \text{ cm y } x=5 \text{ cm} \\ y=5 \text{ cm y } x=12 \text{ cm} \end{cases}$$

Los otros dos trozos miden 5 y 12 cm.

3.70. Si a uno de los lados de un cuadrado se le aumenta su longitud en 5 centímetros y a su lado contiguo en 3 centímetros, el área de la figura aumenta en 71 centímetros cuadrados.

Calcula el lado del cuadrado.

$(x + 5) \cdot (x + 3) = x^2 + 71 \Rightarrow x^2 + 8x + 15 = x^2 + 71 \Rightarrow 8x = 56 \Rightarrow x = 7$ cm

El lado mide 7 cm.

3.71. Utilizando la regla de la división, averigua el dividendo y el divisor sabiendo que el cociente es 2, el resto, 7, y que el producto de ambos es igual a 490.

$$\begin{cases} D = 2d + 7 \\ D \cdot d = 490 \end{cases} \Rightarrow (2d+7)d = 490 \Rightarrow 2d^2 + 7d - 490 = 0 \Rightarrow d = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 2 \cdot 490}}{4} \Rightarrow \begin{cases} d = 14 \text{ y } D = 35 \\ d = -17{,}5 \end{cases}$$

El resultado $d = -17{,}5$ no es entero, por eso no lo consideramos.

3.72. (TIC) En unos laboratorios se ha comprobado que el número de células de una muestra se quintuplica cada minuto transcurrido.

Si inicialmente había dos células, ¿cuántos minutos deben transcurrir para que el número de células sea de 19 531 250?

$2 \cdot 5^x = 19\,531\,250 \Rightarrow 5^x = 9\,765\,625 \Rightarrow 5^x = 5^{10} \Rightarrow x = 10$

3.73.

$$\begin{cases} x + 3 = y^2 \\ x - 3 = \sqrt{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} x + 3 = y^2 \\ x - 3 = y \\ \hline +6 = y^2 - y \end{array} \Rightarrow y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \text{ y } x = 6 \\ y = -2 \end{cases}$$

Tiene 6 años.

3.74. (TIC) Una empresa de reciclado de papel mezcla pasta de papel de baja calidad, que compra por 0,25 euros el kilogramo, con pasta de papel de mayor calidad, de 0,40 euros por kilogramo, para conseguir 50 kilogramos de pasta de 0,31 euros el kilogramo.

¿Cuántos kilogramos utiliza de cada tipo?

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 0{,}25x + 0{,}4y = 50 \cdot 0{,}31 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 0{,}25x + 0{,}25y = 12{,}5 \\ 0{,}25x + 0{,}4y = 15{,}5 \\ \hline -0{,}15y = -3 \end{array} \rightarrow y = 20 \text{ y } x = 30$$

Se utilizan 30 kg de pasta de baja calidad y 20 kg de pasta de mayor calidad.

3.75. Las edades actuales de Ana y su hijo son 49 y 25 años, respectivamente. ¿Hace cuántos años el producto de sus edades era 640?

Hace x años: $(49 - x)(25 - x) = 640 \Rightarrow 1225 - 74x + x^2 = 640 \Rightarrow x^2 - 74x + 585 = 0$

$$x = \frac{74 \pm \sqrt{(-74)^2 - 4 \cdot 585}}{2} = \frac{74 \pm 56}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 65 \\ y = 9 \end{cases}$$

Hace 65 años no pudo ser porque no habían nacido. Por tanto, la respuesta correcta es hace 9 años.

3.76. En la civilización egipcia, debido a las periódicas inundaciones del Nilo, se borraban los lindes de separación de la tierra, y para la reconstrucción de las fincas necesitaban saber construir ángulos rectos.

En un viejo papiro se puede leer lo siguiente:

"La altura del muro, la distancia al pie del mismo y la línea que une ambos extremos son tres números consecutivos".

Halla dichos números.

Tres números consecutivos: x, $x + 1$, $x + 2$

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Los números serán: 3, 4 y 5.

3.77. Una agricultora quiere saber el número de hectáreas de superficie que posee su huerto rectangular. Sabe que la distancia máxima existente entre dos puntos del mismo es de 25 decámetros y que la proporción entre el largo y el ancho es 4:3. Si 1 hectárea equivale a 100 decámetros cuadrados, ¿cuántas hectáreas tiene la superficie?

La distancia máxima entre dos puntos del rectángulo corresponderá a la diagonal de este.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25^2 \\ 3x = 4y \quad \to x = \frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 625 \Rightarrow \frac{25}{9}y^2 = 625 \Rightarrow y^2 = 225 \Rightarrow y = 15 \text{ dam y } x = \frac{4}{3}15 = 20 \text{ dam}$$

Obviamente, solo consideramos las soluciones positivas.

Área = $15 \cdot 20 = 300$ dam^2 = 3 hectáreas

3.78. Con la ayuda de los alumnos de varios centros escolares se está rehabilitando un pueblo abandonado. Ahora se ocupan de la remodelación de un depósito de 1000 metros cúbicos que abastece de agua potable al pueblo. Tiene forma de prisma cuadrangular y su altura es el cuadrado del lado de la base menos 6 metros.

Calcula la longitud del lado de la base y la altura del depósito.

$$\begin{cases} x^2 \cdot h = 1000 \\ h = x^2 - 15 \ \to x^2 = h + 15 \end{cases} \Rightarrow (h + 15) \cdot h = 1000 \Rightarrow h^2 + 15h - 1000 = 0 \Rightarrow$$

$$h = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 4000}}{2} \Rightarrow \begin{cases} h = 25 \\ h = -40 \end{cases}$$

Nos quedamos con las soluciones positivas: h = 25 m.

$x^2 = 40 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$ m

3.79. Una muestra radiactiva se va desintegrando de modo que, cada cinco años, su masa se reduce a la mitad. Si se tienen 800 gramos de dicha sustancia radiactiva, ¿en cuánto tiempo su masa se reducirá a 50 gramos?

$$800\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = 50 \Rightarrow \frac{1}{2^{\frac{x}{5}}} = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{\frac{x}{5}} = 2^4 \Rightarrow \frac{x}{5} = 4 \Rightarrow x = 20 \text{ años}$$

3.80. Dos números suman $\frac{-1}{15}$ y su producto es $\frac{-2}{15}$. Hállalos. ¿De qué ecuación de segundo grado son solución esos dos números?

Aplicando el resultado de la actividad propuesta 5: x = A y x = B son las soluciones de $x^2 - (A+B)x + A \cdot B = 0$. En nuestro caso, la ecuación será $x^2 - \left(\frac{-1}{15}\right)x + \left(\frac{-2}{15}\right) = 0$, que da lugar a la ecuación $15x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 15 \cdot 2}}{2 \cdot 15} = \frac{-1 \pm 11}{30}$.

Los números son: $A = \frac{1}{3}$ y B = $\frac{-2}{5}$

AMPLIACIÓN

3.81. Si r y s son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, el valor de $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}$ es:

a) $b^2 - 4ac$

b) $\frac{b^2 - 4ac}{2a}$

c) $\frac{b^2 - 4ac}{c^2}$

d) $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$

$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{r^2 + s^2}{r^2 s^2} = \frac{(r+s)^2 - 2rs}{(rs)^2} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$. Respuesta d.

3.82. Si la ecuación $\frac{x^2 - bx}{ax + c} = \frac{m-1}{m+1}$ tiene soluciones opuestas, el valor de m debe ser:

a) $\frac{a-b}{a+b}$

b) $\frac{a+b}{a-b}$

c) c

d) $\frac{1}{c}$

Escribamos la ecuación como $(m + 1)(x^2 - bx) - (m - 1)(ax + c) = 0$, es decir, el coeficiente en x de dicha ecuación, que debe ser cero, es $-mb - b - ma + a$, por lo que $m = \frac{a-b}{a+b}$. Respuesta a.

3.83. La ecuación $x + \sqrt{x-2} = 4$ tiene:

a) **Dos soluciones**

b) **Ninguna raíz real**

c) **Una solución**

d) **Tres soluciones**

$\sqrt{x-2} = 4 - x$, es decir: $x - 2 = 16 + x^2 - 8x$, con lo que $x^2 - 9x + 18 = 0$, cuyas soluciones son 6 y 3, pero sustituyendo en la ecuación original, se obtiene que la única solución es $x = 3$. Respuesta c.

3.84. Al resolver una ecuación de 2.º grado, un alumno copia mal el término independiente de la ecuación y obtiene como soluciones 8 y 2. Otro se equivoca en el coeficiente de x y obtiene como soluciones –9 y –1.

La ecuación correcta es:

a) $x^2 - 10x + 9 = 0$

b) $x^2 - 10x + 16 = 0$

c) $x^2 + 10x + 9 = 0$

d) $x^2 - 8x - 9 = 0$

Escribiendo la ecuación como $x^2 + bx + c$, el 1.er estudiante habría copiado $c = 16$ y $b = -10$, y el segundo habría copiado $b = 10$ y $c = 9$, lo que, según el enunciado del problema, implicaría que la ecuación original era $x^2 - 10x + 9 = 0$. Respuesta a.

3.85. Las dos soluciones de la ecuación:

$$a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0 \text{ son 1 y:}$$

a) $\dfrac{b(c-a)}{a(b-c)}$

b) $\dfrac{a(b-c)}{c(a-b)}$

c) $\dfrac{a(b-c)}{b(c-a)}$

d) $\dfrac{c(a-b)}{a(b-c)}$

Siendo 1 y x_2 las soluciones, sabemos que, por ejemplo, $1 \cdot x_2 = \dfrac{c(a-b)}{a(b-c)}$, de donde $x_2 = \dfrac{c(a-b)}{a(b-c)}$.

Respuesta d.

3.86. La solución del sistema $\begin{cases} 3^{x+y} = 81 \\ 81^{x-y} = 3 \end{cases}$ **es:**

a) **No tiene.**

b) $x = \dfrac{5}{2}, y = \dfrac{3}{2}$

c) ***x* e *y* son de distinto signo.**

d) **Nada de lo anterior**

Nos dicen que $x + y = 4$ y $x - y = \dfrac{1}{4}$, de donde $x = \dfrac{17}{8}$, $y = \dfrac{15}{8}$. Respuesta d.

AUTOEVALUACIÓN

3.1. Resuelve la siguiente ecuación lineal.

$$\frac{3(-2x+1)}{2}-5(x-3)=\frac{3x-1}{4}+\frac{1}{2}$$

$-12x + 6 - 20x + 60 = 3x - 1 + 2 \Rightarrow -35x = -65 \Rightarrow x = \frac{13}{7}$

3.2. Halla la solución de esta ecuación.

$$\frac{4x+5}{3}=\frac{1}{2x+3}$$

$(4x + 5)(2x + 3) = 3 \Rightarrow 8x^2 + 22x + 12 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 11x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121-96}}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{4} \\ x = -2 \end{cases}$

3.3. Resuelve la siguiente ecuación polinómica.

$$6x^4+7x^3-52x^2-63x-18=0$$

	6	7	–52	–63	–18			6	25	23	6
3		18	75	69	18	–3			–18	–21	–6
	6	25	23	6	0			6	7	2	0

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$

$P(x) = (x - 3)(6x^3 + 25x^2 + 23x + 6) = (x - 3)(x + 3)(6x^2 + 7x + 2) = (x - 3)(x + 3)\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Soluciones: $x = 3$, $x = -3$, $x = -\frac{2}{3}$ y $x = -\frac{1}{2}$

3.4. Resuelve estas ecuaciones racionales.

a) $\frac{x^2-3}{2}=\frac{-3}{2x^2+1}$ **b)** $\frac{3}{x-2}+\frac{8}{x+5}=\frac{x+1}{x^2+3x-10}$

a) $(x^2 - 3)(2x^2 + 1) = -6 \Rightarrow 2x^4 - 5x^2 + 3 = 0$

$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$

b) $\frac{3}{x-2}+\frac{8}{x+5}=\frac{x+1}{(x-2)(x+5)} \Rightarrow \frac{3(x+5)}{(x-2)(x+5)}+\frac{8(x-2)}{(x-2)(x+5)}=\frac{x+1}{(x-2)(x+5)}$

$3x + 15 + 8x - 16 = x + 1 \Rightarrow 10x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

3.5. Resuelve la siguiente ecuación con radicales.

$$\sqrt{4x+13}+2=\sqrt{-2x+3}$$

$$4x+13+4\sqrt{4x+13}+4=-2x+3 \Rightarrow 2\sqrt{4x+13}=-3x-7 \Rightarrow 16x+52=9x^2+42x+49$$

$$9x^2+26x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-26\pm\sqrt{676+108}}{18} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{9} \\ x=-3 \end{cases}$$

Comprobación: $\begin{cases} x=\frac{1}{9} \Rightarrow & \sqrt{4\frac{1}{9}+13}+2\neq\sqrt{-2\frac{1}{9}+3} \text{ no es solución} \\ x=-3 \Rightarrow & \sqrt{-12+13}+2=\sqrt{6+3} \text{ sí es solución} \end{cases}$

3.6. Resuelve la siguiente ecuación logarítmica.

$$\log_3 \sqrt[5]{81}=3x+2$$

$$\log_3 \sqrt[5]{81}=3x+2 \Rightarrow \sqrt[5]{81}=3^{3x+2} \Rightarrow 3^{\frac{4}{5}}=3^{3x+2} \Rightarrow \frac{4}{5}=3x+2 \Rightarrow 4=15x+10 \Rightarrow$$

$$15x=-6 \Rightarrow x=\frac{-2}{5}$$

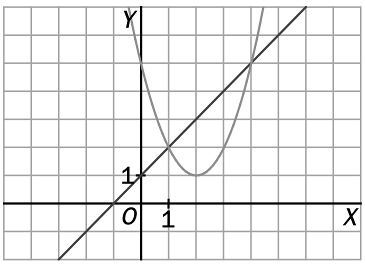
3.7. Resuelve la siguiente ecuación exponencial.

$$9^x-10\cdot 3^x+9=0$$

$3^{2X}-10\cdot 3^X+9=0$

cambio $u=3^x \Rightarrow u^2-10u+9=0 \Rightarrow u=\dfrac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\begin{cases} u=9 \Rightarrow 3^x=9 \Rightarrow x=2 \\ u=1 \Rightarrow 3^x=1 \Rightarrow x=0 \end{cases}$

3.8. Averigua cuál es el sistema de ecuaciones cuya representación gráfica es la siguiente.



¿Cuáles son las soluciones del sistema?

$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=x^2-4x+5 \end{cases} \Rightarrow x+1=x^2-4x+5 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \quad x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5+3}{2}=4 \text{ y } y=5 \\ x=\frac{5-3}{2}=1 \text{ y } y=2 \end{cases}$$

3.9. Resuelve el sistema $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 29 \\ x^2 - 4y = 5 \end{cases}$.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 29 \\ 3x^2 - 12y = 15 \end{cases} \\ \hline \quad 2y^2 + 12y = 14 \end{array} \qquad y^2 + 6y - 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{-6 \pm \sqrt{36+28}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ y = -7 \Rightarrow x^2 = -23 \text{ no tiene solución} \end{cases}$$

Soluciones: $x = 3$, $y = 1$ $\quad x = -3$, $y = 1$

3.10. Un grupo de estudiantes decide contratar un autobús para una excursión.

Calculan que si cada uno paga 14 euros, faltarán 4 euros para poder pagar el alquiler del autobús, pero si cada uno paga 16 euros, sobrarán 6 euros.

¿Cuántos euros debe pagar cada uno para recaudar el precio exacto del alquiler del autobús?

Precio del autobús: x

Número de alumnos: y

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 14y = x - 4 \\ 16y = x + 6 \end{cases} \\ \hline -2y = -10 \rightarrow y = 5 \text{ alumnos} \end{array}$$

$x = 14 \cdot 5 + 4 = 74$ € cuesta el autobús.

$$\frac{74}{5} = 14{,}80 \text{ €}$$

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Razona y descubre > Glotocronología

La glotocronología es una disciplina a caballo entre la lingüística y las matemáticas que se ocupa de la relación entre las lenguas a lo largo del tiempo. Fue desarrollada por el lingüista Morris Swadesh partiendo de dos principios:

- **Existe un vocabulario básico en cada lengua, y es relativamente estable.**
- **Las palabras básicas desaparecen de forma constante a una tasa del 14 % cada milenio.**

Según la teoría de Swadesh, si una lengua originariamente tenía N_0 palabras, el número N de palabras que se conservarán después de t milenios viene dado por la expresión $N = N_0 \cdot (1 - 0{,}14)^t$.

Es decir, la tasa de palabras básicas que se conservan es $c = \dfrac{N}{N_0} = 0{,}86^t$, que, como ves, no depende del número original de palabras.

3.1. Dos lenguas emparentadas comparten hoy el 90 % de sus palabras básicas. De acuerdo con el método de Swadesh, ¿hace cuánto tiempo fueron la misma?

Haciendo uso de la fórmula $\dfrac{N}{N_0} = 0{,}89^t$ tenemos que 0,9 = $0{,}89^t$ y, por tanto, $t = \dfrac{\log 0{,}9}{\log 0{,}89} \cong 0{,}9$ milenios, es decir, 900 años.

3.2. La lengua indoeuropea, de la que entre otras muchas lenguas provienen el castellano, el hindi, el noruego o el yiddish, tuvo su origen aproximadamente en el 3000 a. C. Aplicando la teoría de Swadesh, ¿qué porcentaje de palabras básicas de tu lengua tiene su origen en la indoeuropea?

Como del 3000 a. C. hasta ahora han pasado 5 milenios, tenemos que $c = 0{,}89^5 \cong 0{,}558$, luego se conserva el 55,8 % de las palabras básicas.

3.3. **En el año 900 en la península ibérica había una gran influencia del árabe, que no proviene de la familia indoeuropea, sino de la semítica. Entre los siglos VIII y XV se produjo la llamada Reconquista o conquista cristiana, a través de la cual los cristianos tomaron el control de la península. ¿Crees que en este contexto son válidos los principios de Swadesh? ¿Por qué?**

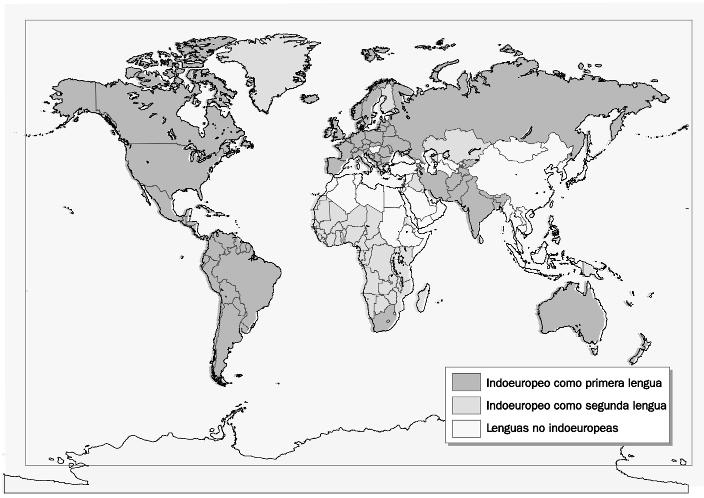
Respuesta abierta.

3.4. **Aunque después se impuso el latín (tres de cada cuatro palabras del castellano provienen de él), casi todas las lenguas de la península tienen una fuerte influencia del árabe.**

Escribe cinco palabras que pienses que provienen del árabe, cinco del latín y cinco de otras lenguas. Después ponlas en común con tus compañeros y verificad con un diccionario si estabais en lo cierto.

Respuesta abierta.

3.5. **Observa ahora los mapas en esta página.**



a) **Hay una lengua europea emparentada con la tuya que, sin embargo, no está próxima geográficamente a la península ibérica. ¿Cuál es? ¿A qué se debe?**

b) **Como ves, el euskera es una lengua no indoeuropea. Su nacimiento sigue siendo un misterio. Investiga las teorías sobre su origen y resúmelas brevemente.**

c) **Las lenguas de la familia indoeuropea se han extendido por todo el mundo. Mirando el mapa, ¿qué países te llaman la atención? Investiga cómo llegaron hasta ellos.**

a) El rumano es una lengua románica, lo que se debe a la conquista romana en el año 106 d. C., durante el reinado del emperador Trajano. Como consecuencia, la región se convirtió en la provincia romana de Dacia durante los siguientes 165 años, siendo el latín la lengua oficial.

b) El euskera es una lengua aislada y se considera la única preindoeuropea superviviente en Europa occidental. Muchos autores creen que los territorios en que se hablaba fueron disminuyendo debido a la presión de las lenguas indoeuropeas en las edades de Bronce y de Hierro; en época romana, el latín impidió su expansión, y, tras un período de recuperación debido a las repoblaciones de la Reconquista, volvió a retroceder ante el empuje del gascón, el navarro-aragonés, el castellano y el francés, hasta quedar restringido a la parte oriental de Vizcaya, al norte de Álava y Navarra, a Guipúzcoa y al País Vasco francés.

c) El imperialismo europeo llevó las lenguas indoeuropeas a América, África, Oceanía y Asia.

Calcula e imagina > La civilización del futuro

De los muchos y variados esfuerzos por imaginar la posibilidad de una civilización fuera de la Tierra, muy pocos han sido tomados en serio. Uno de ellos es la escala de Kardashov, un método desarrollado en 1964 para determinar el grado de avance tecnológico de una civilización.

Para ello, el astrónomo soviético Nikolái Kardashov se fijó en la cantidad de potencia (en vatios) que aprovecha una civilización, y clasificó de forma teórica las civilizaciones en tres tipos:

Tipo	Descripción
1	La civilización es capaz de aprovechar toda la potencia de su planeta.
2	La civilización es capaz de aprovechar toda la potencia de una estrella.
3	La civilización es capaz de aprovechar toda la potencia de una galaxia.

Más tarde, el astrofísico Carl Sagan formuló una expresión matemática para la escala de Kardashov:

$$K = \frac{\log W - 6}{10}$$

donde K es la puntuación de una civilización en la escala, y W es la potencia que es capaz de aprovechar.

3.1. En primer lugar, analiza nuestra civilización con la fórmula de Sagan. Recuerda que el prefijo “tera” significa 10^{12}.

a) Si en el año 1900 aprovechábamos 0,67 teravatios (TW), ¿qué puntuación tenía la Tierra en la escala de Kardashov?

b) Actualmente aprovechamos unos 16 TW. ¿Qué lugar ocupamos ahora?

c) Se estima que en 2030 aprovecharemos unos 22 TW. ¿Qué lugar ocuparemos entonces en la escala de Kardashov?

a) $K = \frac{\log(0{,}67 \cdot 10^{12}) - 6}{10} = \frac{\log 0{,}67 + 12 - 6}{10} \cong 0{,}583$ era la puntuación en 1900.

b) La puntuación actual es $K = \frac{\log(16 \cdot 10^{12}) - 6}{10} = \frac{\log 16 + 12 - 6}{10} \cong 0{,}72$.

c) En 2030, la puntuación será $K = \frac{\log(22 \cdot 10^{12}) - 6}{10} \cong 0{,}734$.

3.2. Como habrás visto, desde este punto de vista nos queda mucho recorrido. De acuerdo con las previsiones del físico teórico Michio Kaku, nuestra civilización alcanzará el tipo 1 dentro de unos 150 años y el tipo 2 en unos 5000 años. El tipo 3 puede tardar medio millón de años.

a) De nuevo utilizando la fórmula de Sagan, ¿cuánta potencia hará falta para alcanzar cada tipo?

b) Con todos los datos obtenidos hasta ahora, mide la velocidad con la que progresamos en la escala como $v = \frac{K_F - K_I}{t}$, donde K_F y K_I son las puntuaciones al final y al inicio de cada período, y t es la duración del período en años. ¿Dirías que estamos acelerando, decelerando o avanzando a velocidad constante?

a) Para ser tipo 1: $1 = \frac{\log W - 6}{10}$; $\log W = 16$; $W = 10^{16}$ =10 000 TW.

Para ser tipo 2: $2 = \frac{\log W - 6}{10}$; $\log W = 26$; $W = 10^{26} = 10^{14}$ TW.

Para ser tipo 3: $W = 10^{36} = 10^{24}$ TW.

b) De 1900 a 2010: $v = \frac{0{,}72 - 0{,}583}{110} \cong 0{,}001$

De 2010 a 2030: $v = \frac{0{,}734 - 0{,}72}{20} \cong 0{,}0007$

De 2030 a 2160: $v = \frac{1 - 0{,}734}{130} \cong 0{,}002$

De 2160 a 7010: $v = \frac{2 - 1}{4850} \cong 0{,}0002$

De 7010 a 502 000: $v \cong 0{,}000002$

Se está decelerando.

3.3. En la historia ha habido grandes cambios que se pueden cuantificar con la escala de Kardashov, como la Revolución Industrial. Si entre 1760 y 1900 subimos 0,5 en esta escala, ¿qué potencia aprovechábamos al comienzo de este período? Comenta las razones de este incremento.

En 1900 se aprovechaban 0,67 teravatios, es decir, 0,583 puntos en la escala de Kardashov. En 1760, la puntuación era de 0,5 puntos menos, es decir, de 0,083, que equivale a una potencia aprovechada de $0{,}083 = \frac{\log W - 6}{10} \Rightarrow \log W = 6{,}83 \Rightarrow W = 10^{6{,}83}$ = 6761 kW.

Respuesta abierta.

3.4. Como ves en la tabla, alcanzar el tipo 1 supone aprovechar toda la potencia disponible en un planeta. Si no extraemos energía de fuera de la Tierra, ¿qué consecuencias crees que puede tener alcanzar este nivel? Por tanto, ¿qué acciones serán necesarias para superar este nivel?

Respuesta abierta.

Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **Juan Jesús Donaire, Vanesa Fernández, Pedro Lomas, Juan Alberto Torresano, Ana María Álvarez, Mariano García, Marta Marcos, Carolina Puente, Joaquín Hernández, María Moreno, Esteban Serrano**

Edición: **Arturo García, Eva Béjar**

Revisión contenidos: **Miguel Nieto**

Corrección: **Ricardo Ramírez**

Ilustración: **Modesto Arregui, Jurado y Rivas, Estudio "Haciendo el león", Félix Anaya, Juan Francisco Cobos, José Santos**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**

Gestión de las direcciones electrónicas:
Debido a la naturaleza dinámica de internet, Ediciones SM no puede responsabilizarse de los cambios o las modificaciones en las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que remite este libro.

Con el objeto de garantizar la adecuación de las direcciones electrónicas de esta publicación, Ediciones SM emplea un sistema de gestión que redirecciona las URL que con fines educativos aparecen en la misma hacia diversas páginas web. Ediciones SM declina cualquier responsabilidad por los contenidos o la información que pudieran albergar, sin perjuicio de adoptar de forma inmediata las medidas necesarias para evitar el acceso desde las URL de esta publicación a dichas páginas web en cuanto tenga constancia de que pudieran alojar contenidos ilícitos o inapropiados. Para garantizar este sistema de control es recomendable que el profesorado compruebe con antelación las direcciones relacionadas y que comunique a la editorial cualquier incidencia a través del correo electrónico ediciones@grupo-sm.com.

Impreso en España – *Printed in Spain*