

# 3 Ecuaciones y sistemas

## ACTIVIDADES INICIALES

- 3.I. Supón que tu idioma comienza a dividirse hoy en dos. Si el principio de la glotocronología se mantiene, ¿qué porcentaje de palabras básicas compartirán en el año 13 000?

$(1-0,14)^{11} = 0,19$  , es decir, se mantendrán el 19 % de las palabras.

- 3.II. La palabra “noche” es de origen indoeuropeo y es similar en muchas lenguas. Averigua cómo se dice en diez de ellas.

Inglés: NIGHT

Francés: NUIT

Alemán: NACHT

Portugués: NOITE

Griego: N'YXTA

Holandés: NACHT

Italiano: NOTTE

Ruso: НОЧЬ

Catalán: NIT

Gallego: NOITE

- 3.III. Busca la clasificación de la Unesco del peligro de extinción de lenguas y pon ejemplos de cada categoría.

Según la Unesco, las lenguas en peligro de extinción se clasifican en:

- Vulnerable: galés (Gran Bretaña).
- En peligro: gaélico (Irlanda).
- Seriamente en peligro: tamazight (Túnez).
- En situación crítica: potawatomi (EE. UU.).
- Extinta: karami (Papúa Nueva Guinea).

## ACTIVIDADES PROPUESTAS

## 3.1. (TIC) Resuelve estas ecuaciones.

$$\text{a)} \quad x - \frac{2x-5}{12} = \frac{3x-1}{4}$$

$$\text{b)} \quad \left(\frac{1-x}{3}\right) = \frac{x}{2} - \frac{x+1}{6}$$

$$\text{c)} \quad x(x-5) = x(x-1) + 2$$

$$\text{d)} \quad 3x(x+3) = 9x + 12$$

$$\text{e)} \quad -2x(x-1) = x^2 - 5x$$

$$\text{a)} \quad x - \frac{2x-5}{12} = \frac{3x-1}{4}$$

$$12x - 2x + 5 = 9x - 3$$

$$x = -8$$

$$\text{b)} \quad \left(\frac{1-x}{3}\right) = \frac{x}{2} - \frac{x+1}{6}$$

$$2 - 2x = 3x - x - 1$$

$$3 = 4x \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$\text{c)} \quad x(x-5) = x(x-1) + 2$$

$$x^2 - 5x = x^2 - x + 2$$

$$-4x = 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{d)} \quad 3x(x+3) = 9x + 12$$

$$3x^2 + 9x = 9x + 12 \Rightarrow 3x^2 = 12$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{12}{3}} = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = 2 \text{ y } x = -2$$

$$\text{e)} \quad -2x(x-1) = x^2 - 5x$$

$$-2x^2 + 2x = x^2 - 5x \Rightarrow 3x^2 - 7x = 0$$

$$x(3x-7) = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3} \text{ y } x = 0$$

$$\text{f)} \quad 2x - (x+5)(x-1) = 4$$

$$\text{g)} \quad (x-1)\left(\frac{3-x}{2}\right) = 4$$

$$\text{h)} \quad 9x^2 + 9x - 10 = 0$$

$$\text{i)} \quad 3x^2 + 5x = 5(x+135)$$

$$\text{j)} \quad x^2 - x(3x+1) = 3$$

$$\text{f)} \quad 2x - (x+5)(x-1) = 4$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4}}{2} \Rightarrow x = \sqrt{2} - 1 \text{ y } x = -\sqrt{2} - 1$$

$$\text{g)} \quad (x-1)\left(\frac{3-x}{2}\right) = 4$$

$$x^2 - 4x + 3 = -8 \Rightarrow x^2 - 4x + 11 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 44}}{2} \Rightarrow \text{No tiene soluciones reales.}$$

$$\text{h)} \quad 9x^2 + 9x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \cdot 10 \cdot 9}}{2 \cdot 9} = \frac{-9 \pm \sqrt{441}}{18}$$

$$x = -\frac{5}{3} \text{ y } x = \frac{2}{3}$$

$$\text{i)} \quad 3x^2 + 5x = 5(x+135)$$

$$3x^2 + 5x = 5x + 675 \Rightarrow 3x^2 = 675$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{675}{3}} = \pm\sqrt{225} \Rightarrow x = -15 \text{ y } x = 15$$

$$\text{j)} \quad x^2 - x(3x+1) = 3$$

$$x^2 - 3x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 + x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \text{No tiene soluciones reales.}$$

3.2. (TIC) Halla las soluciones de estas ecuaciones.

a)  $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

b)  $x^3 - 5x - 2 = 0$

c)  $x(x^2 - 4) = x^2 + 8x$

d)  $x^{2012} - x^{2011} = 0$

e)  $2x^4 + 5x^3 = x^2 - 5x + 3$

f)  $2x^4 - 6x^3 = 32x^2 - 96x$

g)  $(x - 5)(2x + 7)(x + 3) = 0$

h)  $x^5 - 3x^3 - 4x = 0$

a)  $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

$x(x^2 - 5x + 6) = 0$

$x = 0$  y  $x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 24}}{2} \Rightarrow x = 3$  y  $x = 2$

e)  $2x^4 + 5x^3 = x^2 - 5x + 3$

$2x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x - 3 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 5 & -1 & 5 & -3 \\ -3 & & -6 & 3 & -6 & 3 \\ \hline & 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

$x = -3$

$2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$

No tiene soluciones enteras.  $x = \frac{1}{2}$

b)  $x^3 - 5x - 2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -5 & -2 \\ -2 & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$x = -2$  y  $x^2 - 2x - 1 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4}}{2} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}$  y  $x = 1 - \sqrt{2}$

f)  $2x^4 - 6x^3 = 32x^2 - 96x$

$x(2x^3 - 6x^2 - 32x + 96) = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -6 & -32 & 96 \\ 3 & & 6 & 0 & -96 \\ \hline & 2 & 0 & -32 & 0 \end{array}$$

$x = 3$  y  $2x^2 = 32 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow x = 4$  y  $x = -4$

c)  $x(x^2 - 4) = x^2 + 8x$

$x^3 - x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 12) = 0$

$x = 0$  y  $x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 48}}{2} \Rightarrow x = 4$  y  $x = -3$

g)  $(x - 5)(2x + 7)(x + 3) = 0$

$x = 5$ ,  $x = -3$ ,  $x = -\frac{7}{2}$

d)  $x^{2012} - x^{2011} = 0 \Rightarrow x^{2011}(x - 1) = 0$

$x = 0$  y  $x = 1$

h)  $x^5 - 3x^3 - 4x = 0$

$x(x^4 - 3x^2 - 4) = 0$

$x = 0$  y  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow x^2 = 4$  y  $x^2 = -1$

$x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = 2$  y  $x = -2$

$x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow$  No tiene soluciones reales.

## 3.3. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones.

a)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

c)  $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$

b)  $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$

d)  $2x^4 - 6x^2 - 30 = 0$

a)  $x^2 = z \Rightarrow z^2 - 5z + 4 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow z = 4 \text{ y } z = 1$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \text{ y } x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

b)  $x^2 = z \Rightarrow z^2 + 10z + 9 = 0$

$$z = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm 8}{2} \Rightarrow z = -1 \text{ y } z = -9$$

$$x^2 = -1 \text{ y } x^2 = -9 \Rightarrow \text{No tiene soluciones reales.}$$

c)  $x^2 = z \Rightarrow z^2 - 4z - 12 = 0$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 8}{2} \Rightarrow z = 6 \text{ y } z = -2$$

$$x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm \sqrt{6}$$

$$x^2 = -2 \Rightarrow \text{No tiene soluciones reales.}$$

d)  $x^2 = z \Rightarrow 2z^2 - 6z - 30 = 0$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-30)}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{276}}{4} \Rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{69}}{2}$$

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{69}}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{69}}{2}}$$

3.4. Averigua cuánto tardarás en hacer este problema si empleas  $\frac{1}{18}$  en leerlo,  $\frac{1}{5}$  en plantearlo,  $\frac{22}{90}$  en resolverlo, y 1 min 30 s en comprobar la solución.

Llamando  $x$  al tiempo en minutos, la ecuación que resuelve el problema es:

$$\frac{x}{18} + \frac{x}{5} + \frac{22x}{90} + \frac{3}{2} = x \Rightarrow 5x + 18x + 22x + 135 = 90x \Rightarrow 135 = 45x \Rightarrow x = 3 \text{ minutos}$$

3.5. Comprueba que en las ecuaciones de segundo grado de la forma  $x^2 + bx + c = 0$ , que tienen dos soluciones,  $b$  es la suma de las soluciones cambiada de signo y  $c$  es el producto de las soluciones. A continuación resuelve mentalmente:

a)  $x^2 - 7x + 12 = 0$

b)  $x^2 + 3x - 10 = 0$

Si  $x = A$  y  $x = B$  son las soluciones de la ecuación  $x^2 + bx + c = 0$ , entonces esta podemos escribirla como:  $(x-A)(x-B) = 0$ , y multiplicando obtenemos que  $x^2 - (A+B)x + A \cdot B = 0$ . Es decir:  $b = -(A+B)$  y  $c = A \cdot B$ .

a) Dos soluciones:  $x = 4$  y  $x = 3$

b) Dos soluciones:  $x = -5$  y  $x = 2$

3.6. Actividad interactiva.

3.7. Actividad resuelta.

3.8. (TIC) Resuelve estas ecuaciones racionales.

a)  $\frac{x-3}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} = 3$

c)  $\frac{x+1}{x-3} = 5 - \frac{x+9}{x+2}$

b)  $x + \frac{4x}{x-4} = \frac{16}{x-4}$

d)  $\frac{3x+2}{x^2-4} = \frac{5x+1}{x+2} - \frac{1}{x-2}$

a)  $\frac{x-3}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} = 3 \Rightarrow x-3 + x(x+2) = 3(x^2-4) \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 72}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 9}{2 \cdot 2} \Rightarrow x = 3 \text{ y } x = -\frac{3}{2}$$

b)  $x + \frac{4x}{x-4} = \frac{16}{x-4} \Rightarrow x(x-4) + 4x = 16 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = -4, x = 4, \text{ no es solución.}$

c)  $\frac{x+1}{x-3} = 5 - \frac{x+9}{x+2} \Rightarrow (x+1)(x+2) = 5(x^2-x-6) - (x+9)(x-3) \Rightarrow 3x^2 - 14x - 5 = 0$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 + 60}}{2 \cdot 3} = \frac{14 \pm 16}{6} \Rightarrow x = 5 \text{ y } x = -\frac{1}{3}$$

d)  $\frac{3x+2}{x^2-4} = \frac{5x+1}{x+2} - \frac{1}{x-2} \Rightarrow 3x+2 = (5x+1)(x-2) - (x+2) \Rightarrow 5x^2 - 13x - 6 = 0$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 + 120}}{2 \cdot 5} = \frac{13 \pm 17}{10} \Rightarrow x = 3 \text{ y } x = -0,4$$

3.9. (TIC) Resuelve estas ecuaciones con radicales.

a)  $\sqrt{x+3} + 1 = x - 8$

c)  $\sqrt{5-4x} = \sqrt{2x+7} - 2$

b)  $4x - 3\sqrt{x^2+9} = 1$

d)  $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-5} = 2$

a)  $\sqrt{x+3} + 1 = x - 8 \Rightarrow \sqrt{x+3} = x - 9 \Rightarrow x+3 = x^2 - 18x + 81 \Rightarrow x^2 - 19x + 78 = 0$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot 78}}{2} = \frac{19 \pm 7}{2} \Rightarrow x = 13, \text{ es solución. } x = 6, \text{ no es solución.}$$

b)  $4x - 3\sqrt{x^2+9} = 1 \Rightarrow 4x - 1 = 3\sqrt{x^2+9} \Rightarrow 16x^2 - 8x + 1 = 9x^2 + 81 \Rightarrow 7x^2 - 8x - 80 = 0$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 80 \cdot 7}}{2 \cdot 7} = \frac{8 \pm 48}{14} \Rightarrow x = 4, \text{ es solución. } x = -\frac{20}{7}, \text{ no es solución.}$$

c)  $\sqrt{5-4x} = \sqrt{2x+7} - 2 \Rightarrow 5-4x = 2x+7 - 4\sqrt{2x+7} + 4 \Rightarrow 4\sqrt{2x+7} = 6x+6$

$$32x + 112 = 36x^2 + 72x + 36 \Rightarrow 36x^2 + 40x - 76 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 10x - 19 = 0$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 9 \cdot 19}}{2 \cdot 9} = \frac{-10 \pm 28}{18} \Rightarrow x = 1, \text{ es solución. } x = -\frac{19}{9}, \text{ no es solución.}$$

d)  $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-5} = 2 \Rightarrow 2x-3 = 4 + 4\sqrt{x-5} + x-5 \Rightarrow x-2 = 4\sqrt{x-5} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 16x - 80$

$$x^2 - 20x + 84 = 0 \Rightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 84}}{2} = \frac{20 \pm 8}{2} \Rightarrow x = 14, \text{ es solución. } x = 6, \text{ es solución.}$$

- 3.10. Al repartir 4000 € entre varios socios faltan 9, así que tocan a 90 € más cada uno. ¿Cuántos socios son?

Llamando  $x$  al número de socios, la ecuación que resuelve el problema es:

$$\frac{4000}{x-9} = \frac{4000}{x} + 90 \Rightarrow 4000x = 4000x - 36000 + 90x^2 - 810x \Rightarrow x^2 - 9x - 400 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm 41}{2},$$

cuya única solución positiva es  $x = 25$ .

Son 25 socios.

- 3.11. Actividad resuelta.

- 3.12. Resuelve mentalmente estas ecuaciones en las que aparecen logaritmos.

- |                      |                     |
|----------------------|---------------------|
| a) $\log x = 6$      | d) $\log_x 16 = 2$  |
| b) $\log_x x = 1$    | e) $\ln(6-x) = 0$   |
| c) $\log(x+300) = 3$ | f) $\log_3 x^7 = 7$ |

- |                      |  |
|----------------------|--|
| a) $\log x = 6$      | $x = 1000000$  |
| b) $\log_x x = 1$    | $x$ puede ser cualquier número positivo (distinto de 1). |
| c) $\log(x+300) = 3$ | $x = 700$  |
| d) $\log_x 16 = 2$   | $x = 4$  |
| e) $\ln(6-x) = 0$    | $x = 5$  |
| f) $\log_3 x^7 = 7$  | $x = 3$  |

- 3.13. (TIC) Resuelve estas ecuaciones logarítmicas.

- a)  $\log x + \log(x+1) = \log 6$   
 b)  $\log x - \log(x+3) = -1$   
 c)  $\log(x-2) + \log 5 = 1 - \log(x-3)$

a)  $\log x + \log(x+1) = \log 6 \Rightarrow \log x(x+1) = \log 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$

Una solución:  $x = 2$

b)  $\log x - \log(x+3) = -1 \Rightarrow \log \frac{x}{x+3} = -1 \Rightarrow \frac{x}{x+3} = \frac{1}{10} \Rightarrow 10x = x+3 \Rightarrow 9x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

c)  $\log(x-2) + \log 5 = 1 - \log(x-3) \Rightarrow \log 5(x-2) + \log(x-3) = 1 \Rightarrow \log 5(x-2)(x-3) = 1$

$$x^2 - 5x + 6 = 2 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}. \text{ Una solución: } x = 4$$

3.14. (TIC) Halla la solución de las siguientes ecuaciones.

a)  $2\log x = 3\log 2 + \log(x + 6)$

b)  $\log(x^2 - 15x) = 2$

c)  $\log\sqrt{x} = 1 - \log\sqrt{3x + 5}$

a)  $2\log x = 3\log 2 + \log(x + 6) \Rightarrow \log x^2 = \log 8(x + 6) \Rightarrow x^2 = 8x + 48 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 48}}{2} = \frac{8 \pm 16}{2}$

Una solución:  $x = 12$

b)  $\log(x^2 - 15x) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\log(x^2 - 15x) = 1 \Rightarrow \log\sqrt{x^2 - 15x} = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 15x} = 10 \Rightarrow x^2 - 15x - 100 = 0$

$x = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 + 4 \cdot 100}}{2} = \frac{15 \pm 25}{2} \Rightarrow x = 20 \text{ y } x = -5$

c)  $\log\sqrt{x} = 1 - \log\sqrt{3x + 5} \Rightarrow \log\sqrt{x}\sqrt{3x + 5} = 1 \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 5x} = 10 \Rightarrow 3x^2 + 5x - 100 = 0$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 100 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm 35}{6}$ . Una solución:  $x = 5$

3.15. Encuentra qué relación debe existir entre **A** y **B** para que se cumpla la igualdad:

$$\log A + \log B = \log(A + B)$$

$$\log A + \log B = \log(A + B) \Rightarrow \log(A \cdot B) = \log(A + B) \Rightarrow A \cdot B = A + B$$

3.16. Despeja **m** en la siguiente igualdad:

$$\log m = b - \log n$$

$$\log m = b - \log n \Rightarrow \log m = \log 10^b - \log n \Rightarrow \log m = \log \frac{10^b}{n} \Rightarrow m = \frac{10^b}{n}$$

3.17. Actividad resuelta.

3.18. Resuelve estas ecuaciones.

a)  $2^{3x-4} = 64$

c)  $2^{x+1} = 1024$

b)  $3^{2x-7} \cdot 27 = 3^{5x}$

d)  $2^3 \cdot 2^{x-5} = 0,25$

a)  $2^{3x-4} = 64 \Rightarrow 2^{3x-4} = 2^6 \Rightarrow 3x - 4 = 6 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$

b)  $3^{2x-7} \cdot 27 = 3^{5x} \Rightarrow 3^{2x-7} \cdot 3^3 = 3^{5x} \Rightarrow 3^{2x-7+3} = 3^{5x} \Rightarrow 2x - 4 = 5x \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

c)  $2^{x+1} = 1024 \Rightarrow 2^{x+1} = 2^{10} \Rightarrow x + 1 = 10 \Rightarrow x = 9$

d)  $2^3 \cdot 2^{x-5} = 0,25 \Rightarrow 2^{3+x-5} = 2^{-2} \Rightarrow x - 2 = -2 \Rightarrow x = 0$

3.19. (TIC) Resuelve estas ecuaciones exponenciales tomando logaritmos y usando la calculadora.

a)  $5^{x+3} = 9999$

c)  $5^x = 2^{x+3}$

b)  $10^{3-x} = 2^x \cdot 128$

d)  $2^{-x} = 10\,000$

a)  $5^{x+3} = 9999 \Rightarrow \log(5^{x+3}) = \log 9999 \Rightarrow (x+3)\log 5 = \log 9999 \Rightarrow x = \frac{\log 9999}{\log 5} - 3 = 2,722$

b)  $10^{3-x} = 2^x \cdot 128 \Rightarrow 10^{3-x} = 2^{x+7} \Rightarrow \log 10^{3-x} = \log 2^{x+7} \Rightarrow (3-x)\log 10 = (x+7)\log 2$   
 $3-x = x\log 2 + 7\log 2 \Rightarrow 3-7\log 2 = x(\log 2 + 1) \Rightarrow x = \frac{3-7\log 2}{\log 2 + 1} = 0,686$

c)  $\log 5^x = \log 2^{x+3} \Rightarrow x\log 5 = (x+3)\log 2 \Rightarrow x(\log 5 - \log 2) = 3\log 2 \Rightarrow x = \frac{3\log 2}{\log 5 - \log 2} = 2,269$

d)  $2^{-x} = 10\,000 \Rightarrow 2^{-x} = 10^4 \Rightarrow \log 2^{-x} = \log 10^4 \Rightarrow -x\log 2 = 4 \Rightarrow x = -\frac{4}{\log 2} = -13,288$

3.20. (TIC) Halla las soluciones de estas ecuaciones.

a)  $100^x - 1001 \cdot 10^x + 1000 = 0$

d)  $4^x - 8 = 2^{x+1}$

b)  $\frac{1}{2^{x-3}} = 5 - 2^{x-1}$

e)  $4^{x+1} - 5 \cdot 4^{2x-1} + 4864 = 0$

c)  $2^{3+2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 1 = 0$

a)  $100^x - 1001 \cdot 10^x + 1000 = 0 \Rightarrow 10^{2x} - 1001 \cdot 10^x + 1000 = 0$

$10^x = z \Rightarrow z^2 - 1001z + 1000 = 0 \Rightarrow z = \frac{1001 \pm \sqrt{1001^2 - 4 \cdot 1000}}{2} = \frac{1001 \pm 999}{2} \Rightarrow z = 1000 \text{ y } z = 1$   
 $x = 3 \text{ y } x = 0$

b)  $\frac{1}{2^{x-3}} = 5 - 2^{x-1} \Rightarrow \frac{8}{2^x} = 5 - \frac{1}{2} \cdot 2^x \Rightarrow 2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$

$2^x = z \Rightarrow z^2 - 10z + 16 = 0 \Rightarrow z = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} \Rightarrow z = 8 \text{ y } z = 2 \Rightarrow x = 3 \text{ y } x = 1$

c)  $2^{3+2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 1 = 0 \Rightarrow 8 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 1 = 0$

$2^x = z \Rightarrow 8z^2 - 6z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{2 \cdot 8} = \frac{6 \pm 2}{16} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \text{ y } z = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -1 \text{ y } x = -2$

d)  $4^x - 8 = 2^{x+1} \Rightarrow 2^{2x} - 8 = 2 \cdot 2^x$

$2^x = z \Rightarrow z^2 - 2z - 8 = 0 \Rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 8}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow z = 4 \text{ y } z = -2 \Rightarrow x = 2.$

Una solución:  $x = 2$

e)  $4^{x+1} - 5 \cdot 4^{2x-1} + 4864 = 0 \Rightarrow 4 \cdot 4^x - \frac{5}{4} \cdot 4^{2x} + 4864 = 0 \Rightarrow 5 \cdot 4^{2x} - 16 \cdot 4^x - 19\,456 = 0$

$4^x = z \Rightarrow 5z^2 - 16z - 19\,456 = 0 \Rightarrow z = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 4 \cdot 5 \cdot 19\,456}}{2 \cdot 5} = 10 \Rightarrow z = 64 \text{ y } z = -\frac{304}{5}$

$x = 3$ . Una solución:  $x = 3$

3.21. Verifica que por los tres métodos se obtiene la misma solución para el sistema  $\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x + 3y = -13 \end{cases}$ .

Método de reducción:

$$\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x + 3y = -13 \end{cases} \xrightarrow[\text{Restamos las ecuaciones}]{1^\text{a Ecuación} \cdot 2} \begin{cases} 2x - 4y = 22 \\ 2x + 3y = -13 \end{cases}$$

$$-7y = 35 \rightarrow y = -5 \text{ y } x = 1$$

Método de sustitución:

$$\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x + 3y = -13 \end{cases} \rightarrow x = 2y + 11 \Rightarrow 2(2y + 11) + 3y = -13 \Rightarrow 7y = -35 \Rightarrow y = -5 \text{ y } x = 1$$

Método de igualación:

$$\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x + 3y = -13 \end{cases} \rightarrow x = 2y + 11 \Rightarrow 2y + 11 = \frac{-13 - 3y}{2} \Rightarrow 4y - 22 = -13 - 3y \Rightarrow 7y = -35 \Rightarrow y = -5 \text{ y } x = 1$$

3.22. (TIC) Resuelve por distintos métodos los sistemas:

a)  $\begin{cases} 5x + y = 13 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 6 \end{cases}$

a) Método de sustitución:

$$\begin{cases} 5x + y = 13 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases} \rightarrow y = 13 - 5x \Rightarrow 3x + 4(13 - 5x) = 1 \Rightarrow -17x = -51 \Rightarrow x = 3 \text{ y } y = -2$$

b) Método de sustitución:

$$\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \rightarrow x = 4 + 5y \Rightarrow 3(4 + 5y) - y = 2 \Rightarrow 14y = -10 \Rightarrow y = -\frac{5}{7} \text{ y } x = \frac{3}{7}$$

c) Método de reducción:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumamos las ecuaciones}} \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$3x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ y } y = \frac{13}{3}$$

3.23. Si me das 70 monedas, tendré el triple de dinero que tú; pero si yo te doy las 70 monedas, entonces tú tendrás el quintuple que yo.

¿Cuántas monedas tiene cada uno?

Llamando x a mis monedas e y a las tuyas, podemos formar este sistema:

$$\begin{cases} x + 70 = 3(y - 70) \\ y + 70 = 5(x - 70) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = -280 \\ -5x + y = -420 \end{cases} \rightarrow x = 3y - 280 \Rightarrow -5(3y - 280) + y = -420 \Rightarrow -14y = -1820$$

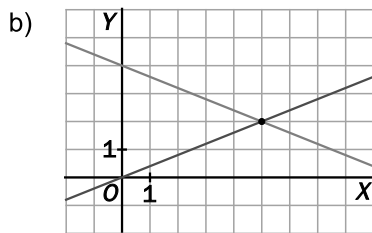
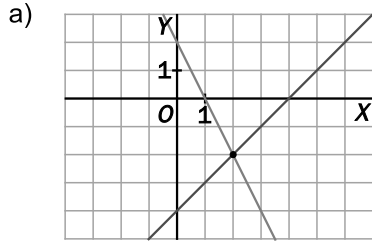
y = 130 y x = 110. Yo tengo 110 monedas, y tú, 130.

3.24. Actividad interactiva.

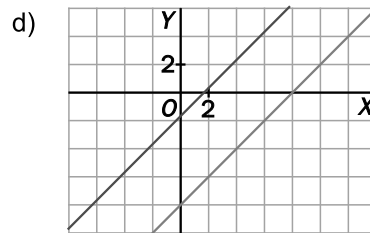
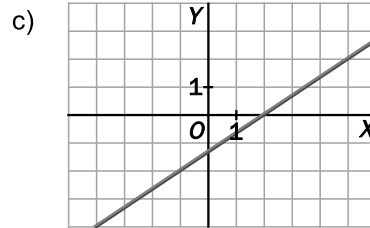
3.25. Actividad resuelta.

3.26. (TIC) Resuelve gráficamente estos sistemas.

a)  $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$



c)  $\begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ 6x - 9y = 12 \end{cases}$



3.27. ¿Por qué a las ecuaciones del tipo  $ax + by = p$  se las llama ecuaciones lineales?

Las ecuaciones del tipo  $ax + by = p$  se llaman ecuaciones lineales porque al representarlas gráficamente dan lugar a una recta.

3.28. Hay un número de dos cifras que suman 10 y que, al intercambiarse, forman otro número que supera en 36 unidades al número inicial. ¿De cuál se trata?

Llamando  $x$  a las decenas y  $y$  a las unidades del número buscado, podemos escribir este sistema:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 10y + x = 10x + y + 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ -x + y = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumamos las ecuaciones}} \begin{cases} x + y = 10 \\ -x + y = 4 \end{cases} \quad \text{El número es 37.}$$

$$2y = 14 \rightarrow y = 7 \quad y \quad x = 3$$

3.29. Actividad resuelta.

3.30. (TIC) Resuelve estos dos sistemas.

a)  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 25 \\ x + y = 25 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 47 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$

a)  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 25 \\ x + y = 25 \end{cases} \rightarrow x = 25 - y \Rightarrow (25 - y)^2 - y^2 = 25 \Rightarrow 625 - 50y + y^2 - y^2 = 25 \Rightarrow -50y = -600$   
 $y = 12 \quad y \quad x = 13$

b)  $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 47 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \rightarrow x = 2y + 7 \Rightarrow 2(2y + 7)^2 - 3y^2 = 47 \Rightarrow 8y^2 + 56y + 98 - 3y^2 = 47$

$$5y^2 + 56y + 51 = 0 \Rightarrow y = \frac{-56 \pm \sqrt{56^2 - 4 \cdot 5 \cdot 51}}{2 \cdot 5} = \frac{-56 \pm 46}{10} \Rightarrow y = -1 \quad y \quad x = 5 \quad y \quad y = -\frac{51}{5} \quad y \quad x = -\frac{67}{5}$$

3.31. (TIC) Resuelve estos sistemas no lineales.

a)  $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 46 \\ xy = 84 \end{cases}$                       b)  $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 12 \\ xy = -3 \end{cases}$

a)  $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 46 \\ xy = 84 \end{cases} \rightarrow x = \frac{84}{y} \Rightarrow \left(\frac{84}{y}\right)^2 - 2y^2 = 46 \Rightarrow 7056 - 2y^4 = 46y^2$

$$2y^4 + 46y^2 - 7056 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{-46 \pm \sqrt{46^2 + 4 \cdot 2 \cdot 7056}}{2 \cdot 2} = \frac{-46 \pm 242}{4} \Rightarrow y^2 = 49 \text{ y } y^2 = -72$$

Si  $y^2 = 49 \Rightarrow y = 7$  y  $x = 12$ ,  $y = -7$  y  $x = -12$ . Si  $y^2 = -72 \Rightarrow y$ . No tiene solución.

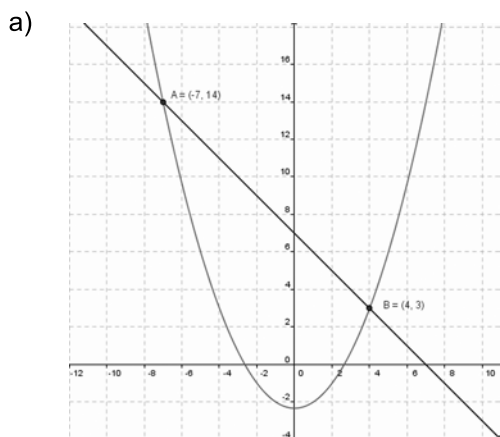
b)  $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 12 \\ xy = -3 \end{cases} \rightarrow x = \frac{-3}{y} \Rightarrow 3\left(\frac{-3}{y}\right)^2 + y^2 = 12 \Rightarrow 27 + y^4 = 12y^2$

$$y^4 - 12y^2 + 27 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 27}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} \Rightarrow y^2 = 9 \text{ y } y^2 = 3$$

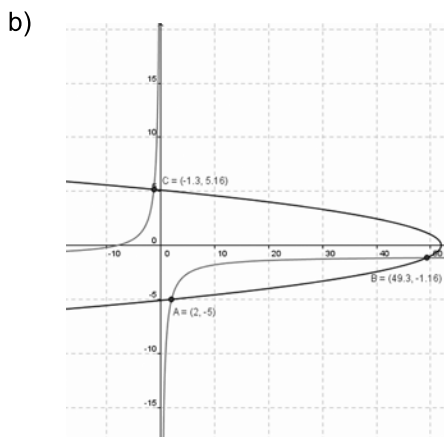
Si  $y^2 = 9 \Rightarrow y = 3$  y  $x = -1$ ,  $y = -3$  y  $x = 1$ .  $y^2 = 3 \Rightarrow y = +\sqrt{3}$  y  $x = -\sqrt{3}$ ,  $y = -\sqrt{3}$  y  $x = \sqrt{3}$ , no es solución.

3.32. (TIC) Con ayuda del programa GeoGebra, resuelve gráficamente estos sistemas.

a)  $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 - 3y = 7 \end{cases}$                       b)  $\begin{cases} xy + x = -8 \\ x + 2y^2 = 52 \end{cases}$



A(-7, 14), B(4, 3)



A(2, -5), B(49, 3), C(-1, 3)

3.33. La diferencia entre dos números positivos es 4, y la suma de sus cuadrados, 58. ¿Cuáles son?

Llamando  $x$  al mayor e  $y$  al menor, formamos este sistema:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases} \rightarrow x = 4 + y \Rightarrow (4 + y)^2 + y^2 = 58 \Rightarrow y^2 + 4y - 21 = 0 \Rightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 21}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2}$$

$y = 3$  y  $x = 7$  y  $y = -7$  y  $x = -3$ . Como solo nos vale la solución en la que  $x$  e  $y$  sean positivos, los números buscados son 7 y 3.

3.34. El área de un rectángulo es igual a 48 metros cuadrados y su diagonal mide 10 metros. Halla las longitudes de sus lados.

Llamando  $x$  e  $y$  a las longitudes, en metros, de sus lados, formamos este sistema:

$$\begin{cases} xy = 48 \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{cases} \rightarrow x = \frac{48}{y} \Rightarrow \left(\frac{48}{y}\right)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow 2304 + y^4 = 100y^2$$

$$y^4 - 100y^2 + 2304 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \cdot 2304}}{2} = \frac{100 \pm 28}{2} \Rightarrow y^2 = 64 \text{ y } y^2 = 36$$

Si  $y^2 = 64 \Rightarrow y = 8$  y  $x = 6$ ,  $y = -8$  y  $x = -6$ . Si  $y^2 = 36 \Rightarrow y = 6$  y  $x = 8$ ,  $y = -6$  y  $x = -8$

Como las longitudes deben ser positivas, los lados del rectángulo miden 6 y 8 metros.

3.35. (TIC) Resuelve el sistema  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 90 \\ x + y = 12 \end{cases}$  de la siguiente forma: eleva al cuadrado la segunda ecuación y después réstale la primera ecuación.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 90 \\ x + y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 90 \\ (x + y)^2 = 12^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 90 \\ x^2 + y^2 + 2xy = 144 \end{cases} \Rightarrow 2xy = 54$$

El sistema se transforma en  $\begin{cases} xy = 27 \\ x + y = 12 \end{cases} \rightarrow x = 12 - y \Rightarrow (12 - y)y = 27 \Rightarrow y^2 - 12y + 27 = 0$ .

$$y = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 27}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} \Rightarrow y = 9 \text{ y } y = 3$$

Soluciones:  $y = 9$  y  $x = 3$ ,  $y = 3$  y  $x = 9$

3.36. Actividad interactiva.

3.37. (TIC) Resuelve estos sistemas exponenciales.

a)  $\begin{cases} 3^{x+y} = 3 \\ 3^{x-2y} = 81 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 5^x + 2^y = 33 \\ 5^{x-1} - 2^{y-1} = 1 \end{cases}$

a)  $\begin{cases} 3^{x+y} = 3 \\ 3^{x-2y} = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 3 \\ 3^x = 81 \cdot 3^{2y} \end{cases} \Rightarrow 81 \cdot 3^{2y} \cdot 3^y = 3 \Rightarrow 3^{3y} = \frac{3}{81} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3} \Rightarrow 3y = -3 \Rightarrow y = -1$  y  $x = 2$

b)  $\begin{cases} 5^x + 2^y = 33 \\ 5^{x-1} - 2^{y-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^x + 2^y = 33 \\ \frac{5^x}{5} - \frac{2^y}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^x + 2^y = 33 \\ 2 \cdot 5^x - 5 \cdot 2^y = 10 \end{cases} \xrightarrow{\substack{5^x = s \\ 2^y = t}} \begin{cases} s + t = 33 \\ 2s - 5t = 10 \end{cases} \rightarrow s = 33 - t$

$$66 - 2t - 5t = 10 \Rightarrow -7t = -56 \Rightarrow t = 8 \text{ y } s = 25 \Rightarrow \begin{cases} s = 5^x = 25 \Rightarrow x = 2 \\ t = 2^y = 8 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

3.38. (TIC) Resuelve estos sistemas logarítmicos.

a) 
$$\begin{cases} x - y = 9 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} \log(2x - 4) + \log y = 2 \\ 4x - y = -9 \end{cases}$$

a) 
$$\begin{cases} x - y = 9 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 9 \\ \log \frac{x}{y} = \log 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 9 \\ x = 10y \end{cases} \Rightarrow 10y - y = 9 \Rightarrow y = 1 \text{ y } x = 10$$

b) 
$$\begin{cases} \log(2x - 4) + \log y = 2 \\ 4x - y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(2x - 4)y = \log 100 \\ 4x - y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy - 4y = 100 \\ y = 4x + 9 \end{cases} \Rightarrow 2x(4x + 9) - 4(4x + 9) = 100$$

$$4x^2 + x - 68 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 4 \cdot 68}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm 33}{8} \Rightarrow x = 4 \text{ y } x = -\frac{17}{4}, \text{ no es solución.}$$

Si  $x = 4, y = 25$

3.39. (TIC) Halla la solución de los siguientes sistemas.

a) 
$$\begin{cases} 10^{2x+y} = 100 \\ \log(2x - y) = 0 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 5^{xy} = 1 \\ \log_8(x^2 y) = 1 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 5^{x-2y} = 1 \\ \log(2x + y) - \log(y - 1) = 1 \end{cases}$$

a) 
$$\begin{cases} 10^{2x+y} = 100 \\ \log(2x - y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10^{2x+y} = 10^2 \\ \log(2x - y) = \log 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Restamos}} \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \\ \hline 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ y } x = \frac{3}{4}$$

b) 
$$\begin{cases} 5^{xy} = 1 \\ \log_8(x^2 y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{xy} = 1 \\ \log_8(x^2 y) = \log_8 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{xy} = 5^0 \rightarrow xy = 0 \\ x^2 y = 8 \rightarrow xy = \frac{8}{x} \end{cases} \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

c) 
$$\begin{cases} 5^{x-2y} = 1 \\ \log(2x + y) - \log(y - 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{x-2y} = 5^0 \\ \log \frac{(2x + y)}{(y - 1)} = \log 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \rightarrow x = 2y \\ 2x + y = 10y - 10 \end{cases}$$

$$4y - 9y = -10 \Rightarrow -5y = -10 \Rightarrow y = 2 \text{ y } x = 4.$$

## EJERCICIOS

## Ecuaciones polinómicas

3.40. (TIC) Resuelve estas ecuaciones lineales.

a)  $-4x + 3 = 7x - 19$

b)  $\frac{-3x}{4} + \frac{1}{2} = -5x + 26$

c)  $-5(2x - 1) + 3x - 2 = -(6x - 4) + 7$

d)  $\frac{4x - 3}{5x + 1} = \frac{9}{16}$

e)  $\frac{x + 3}{6} + \frac{2x - 1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x - 5}{12} - \frac{2}{3}$

a)  $-4x + 3 = 7x - 19 \Rightarrow -11x = -22 \Rightarrow x = 2$

b)  $\frac{-3x}{4} + \frac{1}{2} = -5x + 26 \Rightarrow -3x + 2 = -20x + 104 \Rightarrow 17x = 102 \Rightarrow x = 6$

c)  $-5(2x - 1) + 3x - 2 = -(6x - 4) + 7 \Rightarrow -10x + 5 + 3x - 2 = -6x + 4 + 7 \Rightarrow x = -8$

d)  $\frac{4x - 3}{5x + 1} = \frac{9}{16} \Rightarrow 16(4x - 3) = 9(5x + 1) \Rightarrow 64x - 48 = 45x + 9 \Rightarrow 19x = 57 \Rightarrow x = 3$

e)  $\frac{x + 3}{6} + \frac{2x - 1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x - 5}{12} - \frac{2}{3} \Rightarrow 2x + 6 + 8x - 4 + 3 = x - 5 - 8 \Rightarrow 9x = -18 \Rightarrow x = -2$

3.41. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores.

a)  $\frac{x - 4}{5} - 3(-2x + 2) - \frac{(-4x + 2)}{10} = \frac{5x + 6}{2}$

b)  $3(2x - 5) + 8x - 6 = \frac{x}{2} - (5x + 3)$

c)  $\frac{3(x + 3)}{2} - 2(2 - 3x) = 8x - 1 - 2(x + 3)$

d)  $\frac{6 - 2(x - 3)}{7x} = -\frac{8}{4}$

e)  $\frac{3(x - 2)}{5} + 2(-3x + 1) - \frac{2}{5} = \frac{-4x + 3}{15} + \frac{16}{3}$

a)  $\frac{x - 4}{5} - 3(-2x + 2) - \frac{(-4x + 2)}{10} = \frac{5x + 6}{2} \Rightarrow \frac{x - 4}{5} + 6x - 6 - \frac{-4x + 2}{10} = \frac{5x + 6}{2}$

$$2x - 8 + 60x - 60 + 4x - 2 = 25x + 30 \Rightarrow 41x = 100 \Rightarrow x = \frac{100}{41}$$

b)  $3(2x - 5) + 8x - 6 = \frac{x}{2} - (5x + 3) \Rightarrow 12x - 30 + 16x - 12 = x - 10x - 6 \Rightarrow 37x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{37}$

c)  $\frac{3(x + 3)}{2} - 2(2 - 3x) = 8x - 1 - 2(x + 3) \Rightarrow 3x + 9 - 8 + 12x = 16x - 2 - 4x - 12 \Rightarrow 3x = -15 \Rightarrow x = -5$

d)  $\frac{6 - 2(x - 3)}{7x} = -\frac{8}{4} \Rightarrow 6 - 2x + 6 = -14x \Rightarrow 12x = -12 \Rightarrow x = -1$

e)  $\frac{3(x - 2)}{5} + 2(-3x + 1) - \frac{2}{5} = \frac{-4x + 3}{15} + \frac{16}{3} \Rightarrow 9x - 18 - 90x + 30 - 6 = -4x + 3 + 80 \Rightarrow x = -1$

3.42. Clasifica en tu cuaderno las siguientes ecuaciones de segundo grado según el número de soluciones distintas que tengan.

- |                         |                     |
|-------------------------|---------------------|
| a) $5x^2 + 6x + 2 = 0$  | I. Sin solución     |
| b) $-3x^2 + 4x + 5 = 0$ | II. Una solución    |
| c) $x^2 - 6x + 1 = 0$   | III. Dos soluciones |
| d) $x^2 - 5 = 0$        |                     |
- a)  $b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 5 \cdot 2 < 0 \Rightarrow$  I  
 b)  $b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 > 0 \Rightarrow$  III  
 c)  $b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \Rightarrow$  III  
 d)  $b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot (-5) \cdot 1 > 0 \Rightarrow$  III

3.43. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

- |                         |                          |
|-------------------------|--------------------------|
| a) $6x^2 - 11x + 3 = 0$ | d) $-2x^2 + 2x + 24 = 0$ |
| b) $x^2 - 6x - 7 = 0$   | e) $3x^2 + x + 5 = 0$    |
| c) $x^2 - 6x + 9 = 0$   | f) $4x^2 + 4x + 1 = 0$   |

- a)  $x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{11 \pm 7}{12} \Rightarrow x = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$  y  $x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
- b)  $x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 8}{2} \Rightarrow x = 7$  y  $x = -1$
- c)  $x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$ . Raíz doble
- d)  $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow x = 4$  y  $x = -3$
- e)  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-59}}{6}$ . No tiene solución.
- f)  $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm 0}{8} = \frac{-1}{2}$ . Raíz doble

3.44. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando un procedimiento diferente al de la fórmula general.

- |                       |                                 |
|-----------------------|---------------------------------|
| a) $3x^2 - 27 = 0$    | d) $-7x^2 + \frac{5}{2}x = 0$   |
| b) $x^2 + 2x + 1 = 0$ | e) $(x - 2)^2 - 25 = 0$         |
| c) $4x^2 + 1 = 4x$    | f) $(x + 4)^2 - (2x - 3)^2 = 0$ |

- a)  $3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$
- b)  $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ . Raíz doble
- c)  $4x^2 + 1 = 4x \Rightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
- d)  $x \left( -7x + \frac{5}{2} \right) = 0 \Rightarrow x = 0$  y  $-7x + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{14}$
- e)  $(x - 2)^2 = 25 \Rightarrow x - 2 = 5 \Rightarrow x = 7$  y  $x - 2 = -5 \Rightarrow x = -3$
- f)  $(x + 4)^2 - (2x - 3)^2 = 0 \Rightarrow (x + 4)^2 = (2x - 3)^2 \Rightarrow x + 4 = 2x - 3 \Rightarrow x = 7$  y  $x + 4 = -(2x - 3) \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

3.45. (TIC) Halla la solución de estas ecuaciones.

$$a) \quad \frac{3x^2}{2} - \frac{4x-1}{4} = \frac{2x(x-3)}{6} + \frac{17}{12}$$

$$b) \quad 3x^2 - 4x + 5(x^2 - 2) = \frac{3x(x-2)}{2} + 14$$

$$c) \quad 6x^2 - 1 + \frac{2x(-x+3)}{3} = \frac{5x^2-2}{6} - 4x^2 + \frac{59}{6}$$

$$d) \quad \frac{3(-x+2)}{5} + 4x\left(\frac{-2x+1}{3}\right) = x(-3x+1) - \frac{1}{2}$$

$$e) \quad \frac{3x-1}{5} = \frac{13}{4x+5}$$

$$a) \quad \frac{3x^2}{2} - \frac{4x-1}{4} = \frac{2x(x-3)}{6} + \frac{17}{12} \Rightarrow 18x^2 - 12x + 3 = 4x^2 - 12x + 17 \Rightarrow 14x^2 = 14 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$b) \quad 3x^2 - 4x + 5(x^2 - 2) = \frac{3x(x-2)}{2} + 14 \Rightarrow 6x^2 - 8x + 10x^2 - 20 = 3x^2 - 6x + 28 \Rightarrow 13x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{2 \cdot 13} = \frac{2 \pm 50}{26} \Rightarrow x = 2 \text{ y } x = -\frac{48}{26} = -\frac{24}{13}$$

$$c) \quad 6x^2 - 1 + \frac{2x(-x+3)}{3} = \frac{5x^2-2}{6} - 4x^2 + \frac{59}{6} \Rightarrow 36x^2 - 6 - 4x^2 + 12x = 5x^2 - 2 - 24x^2 + 59$$

$$17x^2 + 4x - 21 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 17 \cdot (-21)}}{2 \cdot 17} = \frac{-4 \pm 38}{34} \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = -\frac{42}{34} = -\frac{21}{17}$$

$$d) \quad \frac{3(-x+2)}{5} + 4x\left(\frac{-2x+1}{3}\right) = x(-3x+1) - \frac{1}{2} \Rightarrow -18x + 36 - 80x^2 + 40x = -90x^2 + 30x - 15$$

$$10x^2 - 8x + 51 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 10 \cdot 51}}{2 \cdot 10} = \frac{8 \pm \sqrt{-1976}}{20}. \text{ No tiene solución.}$$

$$e) \quad \frac{3x-1}{5} = \frac{13}{4x+5} \Rightarrow (3x-1)(4x+5) = 65 \Rightarrow 12x^2 + 15x - 4x - 5 = 65 \Rightarrow 12x^2 + 11x - 70 = 0$$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-70)}}{2 \cdot 12} = \frac{-11 \pm 59}{24} \Rightarrow x = 2 \text{ y } x = -\frac{70}{24} = -\frac{35}{12}$$



## Ecuaciones racionales y con radicales

3.48. (TIC) Resuelve estas ecuaciones racionales.

$$a) \frac{4}{x-2} - \frac{6}{x+3} = \frac{1}{3}$$

$$b) \frac{x+1}{3x-2} + \frac{2x+1}{x+5} = \frac{3}{2}$$

$$c) \frac{4x+2}{x^2+2x+1} + \frac{3}{2} = \frac{x+5}{x+1}$$

$$d) \frac{3}{x+1} - \frac{6}{x+4} = \frac{-2}{4x-8}$$

$$a) \frac{4}{x-2} - \frac{6}{x+3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{12(x+3)}{3(x-2)(x+3)} - \frac{18(x-2)}{3(x-2)(x+3)} = \frac{(x-2)(x+3)}{3(x-2)(x+3)}$$

$$12x + 36 - 18x + 36 = x^2 + x - 6 \Rightarrow x^2 + 7x - 78 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-78)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 19}{2} \Rightarrow x = 6 \text{ y } x = -13$$

$$b) \frac{x+1}{3x-2} + \frac{2x+1}{x+5} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2(x+1)(x+5)}{2(3x-2)(x+5)} + \frac{2(2x+1)(3x-2)}{2(3x-2)(x+5)} = \frac{3(3x-2)(x+5)}{2(3x-2)(x+5)}$$

$$2x^2 + 12x + 10 + 12x^2 - 2x - 4 = 9x^2 + 39x - 30 \Rightarrow 5x^2 - 29x + 36 = 0$$

$$x = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 36}}{2 \cdot 5} = \frac{29 \pm 11}{10} \Rightarrow x = 4 \text{ y } x = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

$$c) \frac{4x+2}{x^2+2x+1} + \frac{3}{2} = \frac{x+5}{x+1} \Rightarrow \frac{4x+2}{(x+1)^2} + \frac{3}{2} = \frac{x+5}{x+1} \Rightarrow \frac{2(4x+2)}{2(x+1)^2} + \frac{3(x+1)^2}{2(x+1)^2} = \frac{2(x+5)(x+1)}{2(x+1)^2}$$

$$8x + 4 + 3x^2 + 6x + 3 = 2x^2 + 12x + 10 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = -3$$

$$d) \frac{3}{x+1} - \frac{6}{x+4} = \frac{-2}{4x-8} \Rightarrow \frac{6(x+4)(x-2)}{2(x+1)(x+4)(x-2)} - \frac{12(x+1)(x-2)}{2(x+1)(x+4)(x-2)} = \frac{-(x+1)(x+4)}{2(x+1)(x+4)(x-2)}$$

$$6x^2 + 12x - 48 - 12x^2 + 12x + 24 = -x^2 - 5x - 4 \Rightarrow 5x^2 - 29x + 20 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 20}}{2 \cdot 5} = \frac{29 \pm 21}{10} \Rightarrow x = 5 \text{ y } x = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

3.49. (TIC) Resuelve estas ecuaciones con radicales.

a)  $x - \sqrt{x} - 6 = 0$

d)  $x + \sqrt{x-1} - 3 = 0$

g)  $2\sqrt{x-1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x-1}}$

b)  $\sqrt{8-x} = 2-x$

e)  $\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4}$

h)  $\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x+3} = 2$

c)  $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1$

f)  $\sqrt{5x+1} - 2 = \sqrt{x+1}$

a)  $x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 = x \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 9 \text{ y } x = 4$$

Comprobación:  $x = 9 \Rightarrow 9 - 3 - 6 = 0$ , es correcto.

$x = 4 \Rightarrow 4 - 2 - 6 \neq 0$ , no es correcto.

b)  $\sqrt{8-x} = 2-x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 4 \text{ y } x = -1$

Comprobación:  $x = 4 \Rightarrow \sqrt{8-4} \neq 2-4$ , no es correcto.

$x = -1 \Rightarrow \sqrt{8+1} = 2+1$ , es correcto.

c)  $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Rightarrow x - 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 4 \text{ y } x = 1$$

Comprobación:  $x = 4 \Rightarrow \sqrt{4} - \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$ , es correcto.

$x = 1 \Rightarrow \sqrt{1} - \frac{2}{\sqrt{1}} \neq 1$ , no es correcto.

d)  $x + \sqrt{x-1} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 5 \text{ y } x = 2$

Comprobación:  $x = 5 \Rightarrow 5 + \sqrt{5-1} - 3 = 0$ , no es correcto.

$x = 2 \Rightarrow 2 + \sqrt{2-1} - 3 = 0$ , es correcto.

e)  $\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4} \Rightarrow 7x+1 = 4(x+4) \Rightarrow 7x+1 = 4x+16 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$

Comprobación:  $x = 5 \Rightarrow \sqrt{7 \cdot 5 + 1} = 2\sqrt{5+4}$ , es correcto.

f)  $\sqrt{5x+1} - 2 = \sqrt{x+1} \Rightarrow 5x+1 - 4\sqrt{5x+1} + 4 = x+1 \Rightarrow 4x+4 = 4\sqrt{5x+1} \Rightarrow x+1 = \sqrt{5x+1}$

$x^2 + 2x + 1 = 5x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = 3$

Comprobación:  $x = 0 \Rightarrow \sqrt{0+1} - 2 = \sqrt{1}$ , no es correcto;

$x = 3 \Rightarrow \sqrt{5 \cdot 3 + 1} - 2 = \sqrt{3+1}$ , es correcto.

g)  $2\sqrt{x-1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} - \frac{5\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow 2x - 2 - 5\sqrt{x-1} = 3 \Rightarrow$

$-5\sqrt{x-1} = -2x + 5 \Rightarrow 25(x-1) = 4x^2 - 20x + 25 \Rightarrow 25x - 25 = 4x^2 - 20x + 25$

$$4x^2 - 45x + 50 = 0 \Rightarrow x = \frac{45 \pm \sqrt{(-45)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 50}}{2 \cdot 4} = \frac{45 \pm 35}{8} \Rightarrow x = 10 \text{ y } x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Comprobación:  $x = 10 \Rightarrow 2\sqrt{10-1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{10-1}}$ , es correcto.

$x = \frac{5}{4} \Rightarrow 2\sqrt{\frac{5}{4}-1} - 5 \neq \frac{3}{\sqrt{\frac{5}{4}-1}}$  ya que  $2\frac{1}{2} - 5 \neq \frac{3}{\frac{1}{2}}$ , no es correcto.

h)  $\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x+3} = 2 \Rightarrow \sqrt{2x^2+1} = 2 + \sqrt{x+3} \Rightarrow 2x^2 + 1 = 4 + x + 3 + 4\sqrt{x+3} \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 4\sqrt{x+3}$

$4x^4 - 4x^3 - 23x^2 + 12x + 36 = 16x + 48 \Rightarrow 4x^4 - 4x^3 - 23x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x+2)(4x^3 - 12x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow x = -2$

Ecuaciones logarítmicas

3.50. (TIC) Halla la solución de estas ecuaciones.

a)  $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1$

b)  $\log_x \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = -0,4$

a)  $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1 \Rightarrow 9^{2x-1} = \sqrt[5]{27} \Rightarrow 3^{4x-2} = 3^{\frac{3}{5}} \Rightarrow 4x - 2 = \frac{3}{5} \Rightarrow 20x - 10 = 3 \Rightarrow 20x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{20}$

b)  $\log_x \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = -0,4 \Rightarrow \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = x^{-0,4} \Rightarrow 2^{\frac{3}{5}-1} = x^{-0,4} \Rightarrow 2^{-\frac{2}{5}} = x^{-0,4} \Rightarrow 2^{-0,4} = x^{-0,4} \Rightarrow x = 2$

3.51. (TIC) Resuelve estas ecuaciones logarítmicas.

a)  $\log(x - 1) + \log(x + 1) = 3\log 2 + \log(x - 2)$

b)  $\log(x - 2) - \frac{1}{2}\log(3x - 6) = \log 2$

c)  $\log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) = 1 - \log_7(2x - 7)$

d)  $\log_9(x + 1) - \log_9(1 - x) = \log_9(2x + 3)$

e)  $\log_2 x - 1 = \log_2(x - 16)$

f)  $\log x = \frac{1}{2} \log(x + 2)$

a)  $\log(x - 1) + \log(x + 1) = 3\log 2 + \log(x - 2) \Rightarrow \log[(x - 1) \cdot (x + 1)] = \log[2^3 \cdot (x - 2)]$

$$x^2 - 1 = 8x - 16 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} \Rightarrow x = 5 \text{ y } x = 3$$

b)  $\log(x - 2) - \frac{1}{2}\log(3x - 6) = \log 2 \Rightarrow \log \frac{(x - 2)^2}{3x - 6} = \log 2^2 \Rightarrow \frac{(x - 2)^2}{3x - 6} = 4$

$$x^2 - 16x + 28 = 0 \Rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28}}{2 \cdot 1} = \frac{16 \pm 12}{2} \Rightarrow x = 14 \text{ y } x = 2, \text{ no es solución.}$$

c)  $\log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) = 1 - \log_7(2x - 7) \Rightarrow \log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) = \log_7 7 - \log_7(2x - 7)$

$$\log_7 \frac{x - 2}{x + 2} = \log_7 \frac{7}{2x - 7} \Rightarrow \frac{x - 2}{x + 2} = \frac{7}{2x - 7} \Rightarrow (x - 2)(2x - 7) = 7(x + 2) \Rightarrow 2x^2 - 11x + 14 = 7x + 14$$

$$2x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 2x(x - 9) = 0 \Rightarrow x = 9 \text{ y } x = 0, \text{ no es solución.}$$

d)  $\log_9(x + 1) - \log_9(1 - x) = \log_9(2x + 3) \Rightarrow \log_9 \frac{x + 1}{1 - x} = \log_9(2x + 3) \Rightarrow \frac{x + 1}{1 - x} = 2x + 3 \Rightarrow$  x

$$+ 1 = (2x + 3)(1 - x) \Rightarrow x + 1 = -x - 2x^2 + 3 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ y } x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \text{ no es solución.}$$

e)  $\log_2 x - 1 = \log_2(x - 16) \Rightarrow \log_2 x - \log_2 2 = \log_2(x - 16) \Rightarrow \log_2 \frac{x}{2} = \log_2(x - 16) \Rightarrow \frac{x}{2} = x - 16 \Rightarrow x = 32$

f)  $\log x = \frac{1}{2} \log(x + 2) \Rightarrow x = \sqrt{x + 2} \Rightarrow x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ y } x = -1, \text{ no es solución.}$$