2 Polinomios

ACTIVIDADES INICIALES

2.I. Aagiuver al etoílmaigo ed al aaarblp “criptografía” y acsbu strao aaarblps equ cotrmapan uss cseraí.

La palabra *criptografía* viene del griego *cripto* (oculto) y *grafía* (escribir). Otras palabras con igual raíz son *cripta* y *encriptar*.

2.II. Julio César dijo: “Dor ñd wudlflrp, shur rglr dñ wudlgru”. ¿Qué quiso decir?

“Amo la traición, pero odio al traidor”.

2.III. Multiplica los números primos 541 y 571. Ahora prueba a factorizar el número 320347. ¿Cuánto tardas en cada operación? ¿Cómo crees que puede utilizarse esto en criptografía?

Multiplicar dos números primos es muy sencillo; en cambio, factorizar números grandes es mucho más complejo, más aún si el número es producto de dos primos lo suficientemente grandes. Encontrar estos dos primos (las claves secretas) es la base de la criptografía moderna.

$$541 \cdot 571 = 308\,911 \qquad 320\,347 = 563 \cdot 569$$

ACTIVIDADES PROPUESTAS

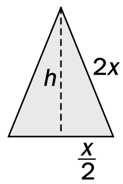
2.1. Actividad resuelta.

2.2. Actividad resuelta.

2.3. Considera un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide la mitad que uno de los otros.

Llama *x* al lado menor y encuentra la expresión algebraica del perímetro y del área.

Calculamos la altura, h, mediante el teorema de Pitágoras:



$(2x)^2 = h^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow 4x^2 = h^2 + \dfrac{x^2}{4}$, de donde, $h = \dfrac{\sqrt{15}x}{2}$

El área del triángulo es $A(x) = \dfrac{\sqrt{15}x^2}{4}$. El perímetro es $P(x) = 5$.

2.4. Explica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios y cuáles no.

a) $\boldsymbol{A(x) = x + 15}$

b) $\boldsymbol{B(x) = \dfrac{x^3}{5} - \sqrt{13}}$

c) $\boldsymbol{C(x) = \sqrt{x} - x + 3}$

d) $\boldsymbol{D(x) = \dfrac{5}{x} + 23x}$

a) $A(x) = x + 15$ sí es un polinomio.

b) $B(x) = \dfrac{x^3}{5} - \sqrt{13}$ sí es un polinomio.

c) $C(x) = \dfrac{5}{x} + 23x$ no es un polinomio porque hay una letra elevada a –1.

d) $D(x) = \sqrt{x} - x + 3$ no es un polinomio porque hay una letra elevada a $\dfrac{1}{2}$.

2.5. **(TIC) Dado el polinomio $P(x) = x^2 - 2x - 15$:**

a) Calcula $P(1)$, $P(-1)$, $P(0)$ y $P(1000)$.

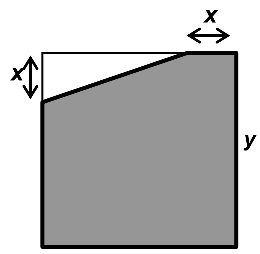
b) ¿Para qué valores de x es $P(x) = 0$?

a) $P(1) = -16$, $P(-1) = -12$, $P(0) = -15$, $P(1000) = 997\,985$

b) $P(x) = 0$ implica que $\mathbf{x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = -3}$ o $\mathbf{x = 5}$.

2.6. **El cuadrado de la figura tiene lado *y*.**

Escribe un polinomio que exprese el área del pentágono sombreado y hállala si *y* = 10 cm y *x* = 3 cm.



El área del pentágono es el área del cuadrado menos el área del triángulo blanco:

$$A(x,y) = y^2 - \frac{(y-x)\cdot x}{2} = y^2 - \frac{xy}{2} + \frac{x^2}{2}$$

$$A(3,10) = 10^2 - \frac{3\cdot 10}{2} + \frac{3^2}{2} = \frac{179}{2} = 89{,}5\ \text{cm}^2$$

2.7. **Actividad resuelta.**

2.8. **Actividad resuelta.**

2.9. **(TIC) Dados $A(x) = 2x - 1$, $B(x) = -2x^2 + 3x - 5$ y $C(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1$, calcula:**

a) $A(x) - B(x)$

b) $A(x)\cdot B(x)$

c) $2x^2 \cdot A(x) - C(x)$

d) $[A(x) + C(x)]^2$

a) $A(x) - B(x) = 2x^2 - x + 4$

b) $A(x)\cdot B(x) = -4x^3 + 8x^2 - 13x + 5$

c) $2x^2 \cdot A(x) - C(x) = x^2 - 1$

d) $[A(x) + C(x)]^2 = 16x^6 - 24x^5 + 25x^4 - 12x^3 + 4x^2$

2.10. **Si el grado de $P(x)$ es 2 y el de $Q(x)$ es 3, ¿qué grado tienen los siguientes polinomios?**

a) $P(x)\cdot Q(x)$

b) $P(x) + [Q(x)]^2$

a) El grado de $P(x)\cdot Q(x)$ es grado ($P(x)$) + grado ($Q(x)$), es decir, 2 + 3 =5.

b) El grado de $P(x) + [Q(x)]^2$ es el grado de $[Q(x)]^2$, es decir, 6.

2.11. **Extrae el factor común de mayor grado en:**

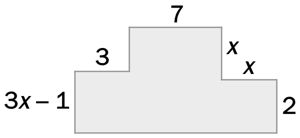
a) $16x^3 + 24x^6$

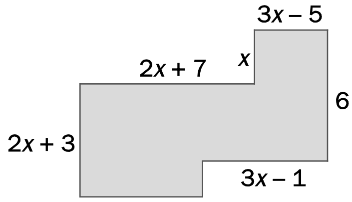
b) $-5x^2z^2 - 10xz^3 - 15x^2z^5$

a) $16x^3 + 24x^6 = 8x^3(2 + 3x^3)$

b) $-5x^2z^2 - 10xz^3 - 15x^2z^5 = -5xz^2(x + 2z + 3xz^3)$

2.12. Expresa el perímetro y el área de estas figuras mediante dos polinomios.





a) Perímetro: $P(x) = 2(3 + 7 + x) + 2(2 + x) = 4x + 24$

Área: $A(x) = (3x - 1) \cdot 3 + 7 \cdot (2 + x) + 2 \cdot x = 18x + 11$

b) Perímetro: $P(x) = 2(x + 2x + 3) + 2(2x + 7 + 3x - 5) = 16x + 10$

Área: $A(x) = (3x - 5)6 + (2x + 7)(2x + 3 - (x + 2x + 3 - 6)) + (2x + 7 + 3x - 5 - 3x + 1)(x + 2x + 3 - 6) =$

$= 18x - 30 + (2x + 7)(-x + 6) + (2x + 3)(3x - 3) = 18x - 30 - 2x^2 + 5x + 42 + 6x^2 + 3x - 9 = 4x^2 + 26x + 3$

2.13. Actividad resuelta.

2.14. Actividad resuelta.

2.15. (TIC) Desarrolla aplicando las identidades notables.

a) $(3 - 4xy)^2$ **c)** $(3a + 2\sqrt{b})^2$

b) $(-b + 7x^2)^2$ **d)** $(2x - 5y)(2x + 5y)$

a) $(3 - 4xy)^2 = 9 + 16x^2y^2 - 24xy$

c) $(3a + 2\sqrt{b})^2 = 9a^2 + 4b + 12a\sqrt{b}$

b) $(-b + 7x^2)^2 = b^2 + 49x^4 - 14bx^2$

d) $(2x - 5y)(2x + 5y) = 4x^2 - 25y^2$

2.16. Copia y completa estas expresiones para que se correspondan con el cuadrado de un binomio.

a) $4 + 6b + \square$ **c)** $9x^6 - 18x^3y + \square$

b) $x^2 + 25y^2 + \square$ **d)** $x^2 + 9x^4 + \square$

a) $4 + 6b + \square = 4 + 6b + \frac{9}{4}b^2 = \left(2 + \frac{3}{2}b\right)^2$

b) $x^2 + 25y^2 + \square = x^2 + 25y^2 + 10xy = (x + 5y)^2$

c) $9x^6 - 18x^3y + \square = 9x^6 - 18x^3y + 9y^2 = (3x^3 - 3y)^2$

d) $x^2 + 9x^4 + \square = x^2 + 9x^4 + 6x^3 = (x + 3x^2)^2$

2.17. (TIC) Descompón estas expresiones en factores.

a) $z^2 - 169$ **c)** $(2a - 7b)^2 - (2a + 7b)^2$

b) $25x^2 - 10xy + y^2$ **d)** $-x^2y^2 - 9y^2 - 6xy^2$

a) $z^2 - 169 = (z + 13)(z - 13)$

b) $25x^2 - 10xy + y^2 = (5x - y)^2$

c) $(2a - 7b)^2 - (2a + 7b)^2 = [(2a - 7b) + (2a + 7b)] \cdot [(2a - 7b) - (2a + 7b)] = 4a \cdot (-14b) = -56ab$

d) $-x^2y^2 - 9y^2 - 6xy^2 = -(xy + 3y)^2$

2.18. Encuentra una fórmula para calcular el cubo de una suma y de una diferencia, $(a+b)^3$ y $(a-b)^3$.

a) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ b) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

2.19. Actividad interactiva.

2.20. Actividad resuelta.

2.21. (TIC) Efectúa las siguientes divisiones indicando el cociente y el resto.

a) $(3x^3 - 2x^2 - 14x + 15) : (3x - 5)$

b) $(x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 17x^2 + 2) : (x^3 - 5x + 2)$

c) $(6x^4 - 2x^3 + 15x - 5) : (3x - 1)$

a) $(3x^3 - 2x^2 - 14x + 15) : (3x - 5)$. Cociente: $C(x) = x^2 + x - 3$, resto: $R(x) = 0$

b) $(x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 17x^2 + 2) : (x^3 - 5x + 2)$. Cociente: $C(x) = x^2 - 3x + 1$, resto: $R(x) = 11x$

c) $(6x^4 - 2x^3 + 15x - 5) : (3x - 1)$. Cociente: $C(x) = 2x^3 + 5$, resto: $R(x) = 0$

2.22. (TIC) Encuentra un polinomio que al multiplicarlo por $3x - 1$ dé como resultado $6x^3 + x^2 - 7x + 2$.

El polinomio que buscamos, $P(x)$, debe cumplir que $(3x - 1) \cdot P(x) = 6x^3 + x^2 - 7x + 2$. Es decir, $P(x)$ será el cociente de la división $(6x^3 + x^2 - 7x + 2) : (3x - 1)$, únicamente si el resto es cero (en caso contrario, el polinomio $P(x)$ no existiría). En este problema, la división sí es exacta y el polinomio es $P(x) = 2x^2 + x - 2$.

2.23. El divisor es $x^2 - 1$, el cociente es $x^3 + 2$ y el resto es $3x$. ¿Cuál es el dividendo?

Sabemos que $D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^3 + 2) + 3x = x^5 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2$.

2.24. Halla m para que $A(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 9x + m$ sea múltiplo de $B(x) = x^2 + 3$.

Al realizar la división se obtiene que el cociente es $C(x) = x^2 - 3x + 1$ y el resto es $R(x) = m - 3$. Así pues, si $m = 3$, el dividendo $A(x)$ será múltiplo del divisor $B(x)$.

2.25. Realiza la siguiente división.

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right) : \left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Cociente: $C(x) = x - 1$, resto: $R(x) = \dfrac{5}{2}$

2.26. Comprueba que al dividir un polinomio de segundo grado, $A(x) = ax^2 + bx + c$, entre $B(x) = x - 1$, el resto es justamente la suma de los coeficientes del polinomio $A(x)$.

Al realizar la división se obtiene que el cociente es $C(x) = ax + a + b$, y el resto, $R(x) = a + b + c$.

2.27. Actividad resuelta.

2.28. Divide usando la regla de Ruffini:

a) $(x^4 - 2x^2 - x + 1) : (x + 2)$

b) $(3x^3 + 4x^2 - 3x - 7) : (x - 5)$

c) $(2x^2 - 3)^2 : (x - 1)$

d) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1)$

e) $(5x^6 - 1) : (x - 1)$

a)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & & -2 & 4 & -4 & 10 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & -5 & 11 \end{array}$$

Cociente: $C(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 5$, resto: $R(x) = 11$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 4 & -3 & -7 \\ 5 & & 15 & 95 & 460 \\ \hline & 3 & 19 & 92 & 453 \end{array}$$

Cociente: $C(x) = 3x^2 + 19x + 92$, resto: $R(x) = 453$

c)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 0 & -12 & 0 & 9 \\ 1 & & 4 & 4 & -8 & -8 \\ \hline & 4 & 4 & -8 & -8 & 1 \end{array}$$

Cociente: $C(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x - 8$, resto: $R(x) = 1$

d)

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Cociente: $C(x) = x^4 + x^2 + 1$, resto: $R(x) = 0$

e)

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ \hline & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 \end{array}$$

Cociente: $C(x) = 5x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 5x + 5$

Resto: $R(x) = 4$

2.29. Halla el valor de *m* para que la división $(x^3 - 5x^2 - 2x + m) : (x - 4)$ sea exacta.

Al realizar la división por Ruffini se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & -2 & m \\ 4 & & 4 & -4 & -24 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & m-24 \end{array}$$

Cociente: $C(x) = x^2 - x - 6$

Resto: $R(x) = m - 24$

Así pues, la división será exacta si $m = 24$.

2.30. Calcula el resto de la división de $x^{30} + x^{29} + x^{28} + \ldots + x^2 + x + 1$ entre $x - 1$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & & 1 & 2 & \ldots & 30 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \ldots & 31 \end{array}$$

El resto será 31.

Para el caso general, el resto de la división $(x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + 1) : (x - 1)$ es $n + 1$.

2.31. Actividad interactiva.

2.32. Actividad resuelta.

2.33. Estudia cuáles de estas divisiones son exactas sin realizar la división.

a) $(2x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x - 3) : (x + 2)$ **c)** $(x^3 + x^2 - 17x + 15) : (x + 5)$

b) $(2x^4 - 7x^3 + x^2 - 5x + 9) : (x - 1)$ **d)** $(x^3 + x^2 - 12x + 7) : (x - 7)$

Usando el teorema del resto podemos hallar el resto de la división y contestar:

a) El resto es $P(-2) = -133 \neq 0$, luego la división no es exacta.

b) El resto es $P(1) = 0$, luego la división sí es exacta.

c) El resto es $P(-5) = 0$, luego la división sí es exacta.

d) El resto es $P(7) = 315 \neq 0$, luego la división no es exacta.

2.34. Calcula el resto de esta división (¡sin realizarla!).

$$(x^{2011} - 2012x^{2013} + 2014) : (x - 1)$$

Usando el teorema del resto podemos asegurar que el resto de la división es $P(1) = 3$.

2.35. Escribe un polinomio de grado 4 que tenga como factor $x - 5$.

Por ejemplo, $P(x) = (x-5)\cdot x^3 = x^4 - 5x^3$

2.36. ¿Cuánto debe valer k para que $x - 2$ sea un factor del polinomio $P(x) = x^3 - 7x + k$?

El resto de la división de $P(x)$ entre $x - 2$ debe ser cero; por tanto, $P(2) = -6 + k$ debe ser cero, y entonces $k = 6$.

2.37. El resto de dividir un polinomio entre $x - 5$ es 2, y el resto de dividirlo entre $x - 2$ es 5. ¿Cuál será el resto de dividirlo entre $x^2 - 7x + 10$?

$(x-2)\cdot(x-5) = x^2 - 7x + 10$

Como el resto al dividir entre $x - 5$ es 2, entonces: $P(x) = (x-5)\cdot A(x) + 2$.

Como el resto al dividir entre $x - 2$ es 5, entonces: $P(x) = (x-2)\cdot B(x) + 5$.

Multiplicando la primera igualdad por $x - 2$ y la segunda por $x - 5$, obtenemos:

$(x-2)\cdot P(x) = (x-2)\cdot(x-5)\cdot A(x) + 2\cdot(x-2)$

$(x-5)\cdot P(x) = (x-5)\cdot(x-2)\cdot B(x) + 5\cdot(x-5)$

Restando miembro a miembro estas dos igualdades y operando:

$3\cdot P(x) = (x-2)\cdot(x-5)\cdot\left[A(x) - B(x)\right] + (-3x + 21)$

$3\cdot P(x) = (x^2 - 7x + 10)\cdot\left[A(x) - B(x)\right] + (-3x + 21)$

Dividiendo la igualdad entre 3, concluimos:

$P(x) = (x^2 - 7x + 10)\cdot C(x) + (-x + 7)$. El resto es $R(x) = -x + 7$.

2.38. Actividad interactiva.

2.39. Actividad resuelta.

2.40. ¿Es $x = 5$ raíz de $5x^{98} + 5x^{49} + 44$?

No es una raíz porque $x = 5$ no hace cero el polinomio de $5x^{98} + 5x^{49} + 44$. Nótese que todos los coeficientes son positivos.

2.41. **(TIC) Determina las raíces enteras de estos polinomios.**

a) $P(x) = 4x^2 - 100$ **c)** $R(x) = x^2 - 3x - 4$

b) $Q(x) = x^4 - 1$ **d)** $S(x) = 2x^2 - 8$

a) $P(x) = 4x^2 - 100 = 4(x+5)(x-5)$. Las raíces enteras son $x = 5$ y $x = -5$.

b) $Q(x) = x^4 - 1 = (x+1)(x-1)(x^2+1)$. Las raíces enteras son $x = 1$ y $x = -1$.

c) $R(x) = x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$. Las raíces enteras son $x = -1$ y $x = 4$.

d) $S(x) = 2x^2 - 8 = 2(x+2)(x-2)$. Las raíces enteras son $x = 2$ y $x = -2$.

2.42. **(TIC) Factoriza los siguientes polinomios.**

a) $2x^3 + 8x^2 - 2x - 8$ **c)** $x^4 + 2x^2 - 3$

b) $x^3 + 7x^2 - 49x - 55$ **d)** $4x^2 - 4x - 3$

a) $2x^3 + 8x^2 - 2x - 8 = 2(x+1)(x-1)(x+4)$

b) $x^3 + 7x^2 - 49x - 55 = (x+1)(x-5)(x+11)$

c) $x^4 + 2x^2 - 3 = (x+1)(x-1)(x^2+3)$

d) $4x^2 - 4x - 3 = (2x+1)(2x-3)$

2.43. **Comprueba que el polinomio $ax^2 + bx + c$ puede factorizarse como $a(x - s_1)(x - s_2)$, donde s_1 y s_2 son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.**

Las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ son $s_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $s_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; por tanto:

$$a\left(x - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = a\left(\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) =$$

$$= a\left[\left(\frac{2ax+b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right] = a\left(\frac{4a^2x^2+b^2+4abx-b^2+4ac}{4a^2}\right) = ax^2+bx+c$$

2.44. **Halla el número máximo de raíces enteras distintas que puede tener un polinomio de coeficientes enteros de término independiente primo.**

Si el término independiente es p, siendo p primo, entonces las únicas raíces enteras que puede tener dicho polinomio son 1, –1, p, $-p$. Por tanto, el máximo número de raíces enteras distintas es cuatro.

2.45. **Actividad interactiva.**

2.46. **(TIC) Descompón en factores irreducibles estos polinomios.**

a) $A(x) = x^3 - 5x^2 + x - 5$ **d)** $D(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$

b) $B(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x$ **e)** $E(x) = x^4 - 9x^2$

c) $C(x) = x^3 + x^2 - 6x - 6$

a) $A(x) = x^3 - 5x^2 + x - 5 = (x-5)(x^2+1)$

b) $B(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x = x(x+2)(3x-1)$

c) $C(x) = x^3 + x^2 - 6x - 6 = (x+1)(x^2-6) = (x+1)\left(x+\sqrt{6}\right)\left(x-\sqrt{6}\right)$

d) $D(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24 = (x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$

e) $E(x) = x^4 - 9x^2 = x^2(x+3)(x-3)$

2.47. (TIC) Factoriza estos polinomios.

a) $P(x) = x^4 - x^2$

b) $Q(x) = x^2 - 49$

c) $R(x) = 2x^3 - 2x$

d) $S(x) = x^8 - 16x^2$

e) $T(x) = 4x^{200} + 12x^{100} + 9$

f) $U(x) = x^{17} - 2x^{16}$

a) $P(x) = x^4 - x^2 = x^2(x + 1)(x - 1)$

b) $Q(x) = x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$

c) $R(x) = 2x^3 - 2x = 2x(x + 1)(x - 1)$

d) $S(x) = x^8 - 16x^2 = x^2(x^3 + 4)(x^3 - 4)$

e) $T(x) = 4x^{200} + 12x^{100} + 9 = (2x^{100} + 3)^2$

f) $U(x) = x^{17} - 2x^{16} = x^{16}(x - 2)$

2.48. Sin multiplicar los binomios, halla el valor de k para que $P(x) = (x-1)^2(x+1)^2(x+k)(x-2)$ sea la descomposición factorial de $P(x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 4$.

Como $P(x) = (x-1)^2(x+1)^2(x+k)(x-2)$ y $P(x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 4$, entonces el producto de los términos sin x de $P(x) = (x-1)^2(x+1)^2(x+k)(x-2)$ debe ser $1 \cdot 1 \cdot k \cdot (-2) = -4$, de donde $k = 2$.

2.49. Demuestra que un polinomio es divisible entre $x - 1$ si la suma de sus coeficientes es cero.

En efecto, ya que el valor numérico de un polinomio para $x = 1$ es la suma de sus coeficientes.

2.50. Factoriza el polinomio $P(x) = 4x^4 + 1$. Para ello, suma y resta $4x^2$ y luego aplica las identidades notables.

$$4x^4 + 1 = 4x^4 + 1 + 4x^2 - 4x^2 = (2x^2 + 1)^2 - 4x^2 = (2x^2 + 1 + 2x)(2x^2 + 1 - 2x)$$

2.51. Actividad interactiva.

EJERCICIOS

Expresiones algebraicas y polinomios

2.52. Expresa las siguientes cantidades en lenguaje algebraico.

a) El área de un rectángulo de base *b* y altura *h*.

b) El área de un cuadrado de lado *l*.

c) El espacio recorrido en un tiempo *t* por un móvil que lleva velocidad constante *v*.

d) El volumen de un cubo de arista *x*.

e) El volumen de un cilindro de radio *r* y altura *h*.

f) El perímetro de un triángulo isósceles de lados iguales *x* y lado desigual *y*.

a) $A = b \cdot h$

b) $A = l^2$

c) $E = v \cdot t$

d) $V = x^3$

e) $V = \pi r^2 h$

f) $P = 2x + y$

2.53. ¿Cuál de estas expresiones algebraicas es un monomio?

a) $\sqrt{12x}$ **b)** $\dfrac{4}{x}$ **c)** $3x^{-2}$ **d)** $x^2\sqrt{3}$

Para ser un monomio, el exponente debe ser natural. Vamos a ver el exponente de cada expresión:

a) Exponente $\frac{1}{2}$

b) Exponente –1

c) Exponente –2

d) Exponente 2

Por tanto, el único monomio es el del apartado d.

2.54. En estas columnas están, desordenados, cuatro polinomios y sus respectivos valores numéricos para ciertos valores de *x*.

Polinomio
$x^4 - 2x^2 - x + 1$
$x^2 - 3(x + 1)$
$\frac{x^2}{2} + 1$
$-x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x + 1$

x
$x = 2$
$x = 0$
$x = 4$
$x = -2$

Valor numérico
–3
–1
7
9

Relaciona en tu cuaderno cada polinomio con su valor numérico para el valor de *x* correspondiente.

$x^4 - 2x^2 - x + 1 \rightarrow x = 2 \rightarrow 7$

$x^2 - 3(x + 1) \rightarrow x = 0 \rightarrow -3$

$\frac{x^2}{2} + 1 \rightarrow x = 4 \rightarrow 9$

$-x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x + 1 \rightarrow x = -2 \rightarrow -1$

2.55. (TIC) Dados los monomios $A(x) = 6x^2$, $B(x) = 3x^4$, $C(x) = \frac{1}{2}x^4$ y $D(x) = -2x$, realiza estas operaciones.

a) $A(x) + D(x)$ **c)** $A(x) - B(x) + C(x)$ **e)** $B(x) : C(x)$ **g)** $A(x) \cdot B(x) \cdot C(x)$

b) $B(x) - C(x)$ **d)** $A(x) \cdot D(x)$ **f)** $D(x) \cdot B(x)$ **h)** $A(x) : [D(x) \cdot B(x)]$

a) $A + D = 6x^2 + (-2x) = 6x^2 - 2x$

b) $B - C = 3x^4 - \frac{1}{2}x^4 = \frac{5}{2}x^4$

c) $A - B + C = 6x^2 - 3x^4 + \frac{1}{2}x^4 = 6x^2 - \frac{5}{2}x^4$

d) $A \cdot D = 6x^2 \cdot (-2x) = -12x^3$

e) $B : C = 3x^4 : \frac{1}{2}x^4 = 6$

f) $D \cdot B = -2x \cdot 3x^4 = -6x^5$

g) $A \cdot B \cdot C = 6x^2 \cdot 3x^4 \cdot \frac{1}{2}x^4 = 9x^{10}$

h) $A : D \cdot B = 6x^2 : (-2x) \cdot 3x^4 = -3x \cdot 3x^4 = -9x^5$

2.56. (TIC) Realiza los siguientes productos y divisiones de polinomios entre monomios.

a) $(-2x^2 + x) \cdot (3x^2)$ **c)** $(-3x^4 + 2x^3 - 5x) : (4x)$

b) $(x^3 - 2x + 1) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)$ **d)** $(4x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2) : (2x^2)$

a) $(-2x^2 + x) \cdot (3x^2) = -6x^4 + 3x^3$

b) $(x^3 - 2x + 1)\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}x$

c) $(-3x^4 + 2x^3 - 5x) : (4x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}$

d) $(4x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2) : (2x^2) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$

Suma y producto de polinomios

2.57. (TIC) Dados $P(x) = 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$, $Q(x) = 3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2$ y $R(x) = -4x^4 + x^2 - 4$, realiza las siguientes operaciones.

a) $P(x) + Q(x)$

b) $Q(x) - R(x)$

c) $R(x) - Q(x) + P(x)$

d) $P(x) + Q(x) + R(x)$

a) $P(x) + Q(x) = 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 + 3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2 = 2x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{3}x + 3$

b) $Q(x) - R(x) = (3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2) - (-4x^4 + x^2 - 4) = 4x^4 + 3x^3 - \frac{2}{3}x + 6$

c) $R(x) - Q(x) + P(x) = -4x^4 + x^2 - 4 - (3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2) + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 =$

$= -4x^4 + x^2 - 4 - 3x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - 2 + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 = -2x^4 - 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{3}x - 5$

d) $P(x) + Q(x) + R(x) = (2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1) + (3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2) + (-4x^4 + x^2 - 4) =$

$= -2x^4 + 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{11}{3}x - 1$

2.58. (TIC) Calcula estas potencias.

a) $(x + y - 2z)^2$

b) $(3a - 2b + c)^2$

a) $(x + y - 2z)^2 = (x + y - 2z) \cdot (x + y - 2z) = x^2 + xy - 2zx + xy + y^2 - 2yz - 2xz - 2yz + 4z^2 =$
$= x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz$

b) $(3a - 2b + c)^2 = (3a - 2b + c) \cdot (3a - 2b + c) = 9a^2 - 6ab + 3ac - 6ab + 4b^2 - 2bc + 3ac - 2bc + c^2 =$
$= 9a^2 + 4b^2 + c^2 - 12ab + 6ac - 4bc$

2.59. Un polinomio es de grado 7, y otro, de grado 6.

a) ¿De qué grado es el polinomio suma?

b) ¿De qué grado es el polinomio producto?

c) ¿De qué grado es el cubo del segundo?

a) La suma tendrá grado 7, ya que es el mayor de los grados de los dos polinomios.

b) El producto tendrá grado 7 + 6 = 13.

c) El cubo del segundo tendrá grado 3 · 6 = 18.

2.60. Rellena en tu cuaderno cada recuadro con el coeficiente adecuado.

a) $(2x^2 + \square x - 1) - (-3x^2 - 5x + \square) = 5x^2 + 2x + 4$

b) $(3x^4 - x + 2) - (\square x^4 + \square x + \square) = 4x^4 + 3x + 3$

c) $(5x^3 + \square x^2 + \square) + (\square x^3 + x^2 - 2) = 2x^3 - 3x^2 - 3$

a) $(2x^2 + \boxed{(-3)}\, x - 1) - (-3x^2 - 5x + \boxed{(-5)}\,) = 5x^2 + 2x + 4$

b) $(3x^4 - x + 2) - (\boxed{(-1)}\, x^4 + \boxed{(-4)}\, x + \boxed{(-1)}\,) = 4x^4 + 3x + 3$

c) $(5x^3 + \boxed{(-4)}\, x^2 + \boxed{(-1)}\,) + (\boxed{(-3)}\, x^3 + x^2 - 2) = 2x^3 - 3x^2 - 3$

2.61. (TIC) Realiza estas operaciones con los polinomios $P(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1$, $Q(x) = 3x^3 - 4x - 2$ y $R(x) = 4x^2 - 5x + 3$.

a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$ b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)]$ c) $R(x) \cdot [P(x) + Q(x)]$

a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right) \cdot [(3x^3 - 4x - 2) + (4x^2 - 5x + 3)] =$

$= \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right) \cdot (3x^3 + 4x^2 - 9x + 1) = \frac{3}{2}x^7 + 2x^6 - \frac{9}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 6x^6 + 8x^5 - 18x^4 + 2x^3 + 3x^3 +$

$+ 4x^2 - 9x + 1 = \frac{3}{2}x^7 + 8x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{35}{2}x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 9x + 1$

b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)] = (3x^3 - 4x - 2) \cdot \left[\left(4x^2 - 5x + 3\right) - \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right)\right] =$

$= (3x^3 - 4x - 2) \cdot (4x^2 - 5x + 3 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 1) = -\frac{3}{2}x^7 - 6x^6 + 12x^5 - 15x^4 + 6x^3 + 2x^5 + 8x^4 -$

$- 16x^3 + 20x^2 - 8x + x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 10x - 4 = -\frac{3}{2}x^7 - 6x^6 + 14x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 2x - 4$

c) $R(x) \cdot [P(x) + Q(x)] = (4x^2 - 5x + 3) \cdot \left[\left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right) + \left(3x^3 - 4x - 2\right)\right]$

$= (4x^2 - 5x + 3) \cdot \left(\frac{1}{2}x^4 + 5x^3 - 4x - 1\right) = 2x^6 + 20x^5 - 16x^3 - 4x^2 - \frac{5}{2}x^5 - 25x^4 + 20x^2 + 5x + \frac{3}{2}x^4 +$

$+ 15x^3 - 12x - 3 = 2x^6 + \frac{35}{2}x^5 - \frac{47}{2}x^4 - x^3 + 16x^2 - 7x - 3$

2.62. ¿Puede la suma de dos polinomios de grado 3 ser de grado 2? Pon un ejemplo.

La suma será de grado 2 si los coeficientes de los términos de grado 3 son opuestos y los de grado 2 no lo son.

Ejemplo: $(-4x^3 + 2x^2 + 3x - 1) + (4x^3 + 5x - 3) = 2x^2 + 8x - 4$

Identidades notables

2.63. (TIC) Efectúa estas operaciones.

a) $(2x^2 - 3y)^2$

b) $(3x - 2y)^3$

c) $(3x^3 - \sqrt{x})^2$

d) $(2x^4 + x^2)^2$

e) $(5a + 3b) \cdot (5a - 3b)$

f) $(2xy + 4zt) \cdot (2xy - 4zt)$

a) $(2x^2 - 3y)^2 = 4x^4 + 9y^2 - 12x^2y$

b) $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 8y^3 - 54x^2y + 36xy^2$

c) $(3x^3 - \sqrt{x})^2 = 9x^6 + x - 6x^3\sqrt{x}$

d) $(2x^4 + x^2)^2 = 4x^8 + 4x^6 + x^4$

e) $(5a + 3b) \cdot (5a - 3b) = 25a^2 - 9b^2$

f) $(2xy + 4zt) \cdot (2xy - 4zt) = 4x^2y^2 - 16z^2t^2$

2.64. (TIC) Desarrolla estas expresiones.

a) $(4x^2y^3 - 5y^2t)^2$ b) $(-3 + 6b^3c^4)^2$ c) $(5x^3z + 7y^2t) \cdot (5x^3z - 7y^2t)$

a) $(4x^2y^3 - 5y^2t)^2 = 16x^4y^6 + 25y^4t^2 - 40x^2y^5t$

b) $(-3 + 6b^3c^4)^2 = 9 + 36b^6c^8 - 36b^3c^4$

c) $(5x^3z + 7y^2t) \cdot (5x^3z - 7y^2t) = 25x^6z^2 - 49y^4t^2$

División de polinomios

2.65. (TIC) Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(6x^3 - 2x^2 - 1) : (x^2 + x + 2)$ **c)** $(x^6 - 2x^3 + 3x - 3) : (-2x^3 + x - 2)$

b) $(-3x^4 + x^2 - 2x + 3) : (3x^2 - 2x + 1)$

a)

$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & -2x^2 & & -1 & x^2+x+2 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & -6x^2 & -12x & & 6x-8 \\ \cline{1-3}
 & -8x^2 & -12x & -1 & \\
 & 8x^2 & +8x & +16 & \\ \cline{2-4}
 & & -4x & +15 &
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
-3x^4 & & +x^2 & -2x & +3 & 3x^2-2x+1 \\ \cline{6-6}
3x^4 & -2x^3 & +x^2 & & & -x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9} \\ \cline{1-4}
 & -2x^3 & +2x^2 & -2x & & \\
 & 2x^3 & -\frac{4}{3}x^2 & +\frac{2}{3}x & & \\ \cline{2-5}
 & & \frac{2}{3}x^2 & -\frac{4}{3}x & +3 & \\
 & & -\frac{2}{3}x^2 & +\frac{4}{9}x & -\frac{2}{9} & \\ \cline{3-5}
 & & & -\frac{8}{9}x & +\frac{25}{9} &
\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^6 & & -2x^3 & & +3x & -3 & -2x^3+x-2 \\ \cline{7-7}
-x^6 & \frac{1}{2}x^4 & -x^3 & & & & -\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2} \\ \cline{1-5}
 & \frac{1}{2}x^4 & -3x^3 & & +3x & & \\
 & -\frac{1}{2}x^4 & & +\frac{1}{4}x^2 & -\frac{1}{2}x & & \\ \cline{2-6}
 & & -3x^3 & -\frac{1}{4}x^2 & +\frac{5}{2}x & -3 & \\
 & & 3x^3 & & -\frac{3}{2}x & +3 & \\ \cline{3-6}
 & & & -\frac{1}{4}x^2 & +x & &
\end{array}$$

2.66. Expresa las siguientes divisiones en la forma $\dfrac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{d(x)}$.

a) $\dfrac{3x^2-3x+1}{x^2+2x-1}$ **c)** $\dfrac{4x^2-1}{x^2+3}$

b) $\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x+3}$ **d)** $\dfrac{2x^3+x^2-x+3}{x^3+2x-1}$

a) $\dfrac{3x^2-3x+1}{x^2+2x-1} = 3 + \dfrac{-9x+4}{x^2+2x-1}$ c) $\dfrac{4x^2-1}{x^2+3} = 4 + \dfrac{-13}{x^2+3}$

b) $\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x+3} = x - 1 + \dfrac{-3x+1}{x^2-x+3}$ d) $\dfrac{2x^3+x^2-x+3}{x^3+2x-1} = 2 + \dfrac{x^2-5x+5}{x^3+2x-1}$

Regla de Ruffini

2.67. Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini e indica el cociente y el resto.

a) $(3x^4 - 2x^2 + x - 3) : (x + 1)$

b) $(x^5 - 2x^3 - x + 1) : (x - 1)$

c) $(2x^3 - x^2 + 3x - 1) : (x + 2)$

a)

	3	0	–2	1	–3
–1		–3	3	–1	0
	3	–3	1	0	**–3**

Cociente: $3x^3 - 3x^2 + x$

Resto: –3

b)

	1	0	–2	0	–1	1
1		1	1	–1	–1	–2
	1	1	–1	–1	–2	**–1**

Cociente: $x^4 + x^3 - x^2 - x - 2$

Resto: –1

c)

	2	–1	3	–1
–2		–4	10	–26
	2	–5	13	**–27**

Cociente: $2x^2 - 5x + 13$

Resto: –27

2.68. Halla el valor de k en los siguientes polinomios teniendo en cuenta los datos indicados.

a) $x^3 + (k + 2)x + 1$ **es divisible entre** $(x + 1)$.

b) $(x^4 + kx^2 + 2x + 1) : (x - 1)$ **tiene –4 de resto.**

c) $x^4 + 3x^3 + kx^2 + x - 6$ **tiene por factor** $(x + 3)$.

a) Igualamos el valor del polinomio en –1 a cero:

$P(-1) = (-1)^3 + (k + 2) \cdot (-1) + 1 = -1 - k - 2 + 1 = -k - 2 = 0 \Rightarrow k = -2$

b) Igualamos el valor del polinomio en 1 a –4:

$P(1) = 1^4 + k \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + k + 2 + 1 = 4 + k = -4 \Rightarrow k = -8$

c) Igualamos el valor del polinomio en –3 a 0:

$P(-3) = (-3)^4 + 3 \cdot (-3)^3 + k \cdot (-3)^2 + (-3) - 6 = 81 - 81 + 9k - 3 - 6 = 9k - 9 = 0 \Rightarrow k = 1$

2.69. (TIC) Realiza la división $(3x^3 - 4x + 1) : (x^2 - 1)$ utilizando la regla de Ruffini.

Para poder dividir un polinomio entre un binomio usando Ruffini, el divisor ha de tener grado 1, y en este caso tiene grado 2; por tanto, no podremos usar Ruffini directamente.

Teoremas del resto y del factor

2.70. Calcula el resto de la división $M(x) : (x - 6)$ sabiendo que $M(6) = 3$.

Si $M(6) = 3$, aplicando el teorema del resto sabemos que el resto será 3.

2.71. Calcula el resto de las siguientes divisiones sin realizarlas.

a) $(x^7 - 3x^2 + 1) : (x - 1)$ **b)** $(x^{101} - 2) : (x + 1)$ **c)** $(x^5 - 2x^3 + 3) : (x - 3)$

¿Qué teorema has utilizado?

a) $P(1) = 1^7 - 3 \cdot 1^2 + 1 = -1$ Resto = –1

b) $P(-1) = (-1)^{101} - 2 = -1 - 2 = -3$ Resto = –3

c) $P(3) = 3^5 - 2 \cdot 3^3 + 3 = 243 - 54 + 3 = 192$ Resto = 192

Se ha utilizado el teorema del resto.

2.72. ¿Es divisible entre $(x + 3)$ el polinomio $x^9 + 3^9$?

Calculemos $P(-3)$: $P(-3) = (-3)^9 + 3^9 = -3^9 + 3^9 = 0$, por lo que el polinomio es divisible entre $(x + 3)$.

2.73. Calcula el resto de la división:

$(x^{157} - 49x^{38} + 17) : (x + 1)$

Aplicando el teorema del resto:

$P(-1) = (-1)^{157} - 49 \cdot (-1)^{38} + 17 = -1 - 49 + 17 = -33$

Por tanto, el resto será –33.

Raíces de un polinomio. Factorización

2.74. Indica razonadamente cuáles son las raíces de estos polinomios.

a) $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$ **c)** $P(x) = (x + 1)(x^2 + 9)(4x^2 - 3)$

b) $P(x) = (3x - 7)(x + 1)(x^2 - 5)$

Las raíces de los polinomios son los valores de la x para los que se anula cada paréntesis.

a) $x = 1$, $x = -2$, $x = 3$ c) $x = -1$, $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

b) $x = \dfrac{7}{3}$, $x = -1$, $x = \pm\sqrt{5}$

2.75. (TIC) Calcula las raíces enteras de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2x - 6$ **c)** $R(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x - 9$

b) $Q(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

a) Posibles raíces enteras: ±1, ±2, ±3 y ±6
$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 6 = 2 + 6 - 2 - 6 = 0$
$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 6 = -2 + 6 + 2 - 6 = 0$
$P(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 6 = -54 + 54 + 6 - 6 = 0$
Raíces enteras de $P(x)$: 1, –1 y –3

b) Posibles raíces enteras: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6 y ±12
$Q(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 12 = 1 + 2 - 7 - 8 + 12 = 0$
$Q(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 12 = 16 - 16 - 28 + 16 + 12 = 0$
$Q(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3 - 7 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 12 = 16 + 16 - 28 - 16 + 12 = 0$
$Q(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 + 12 = 81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$
Raíces enteras de $Q(x)$: –1, 2, –2 y 3

c) Posibles raíces enteras: ±1, ±3 y ±9
$R(3) = 3^4 + 3^3 - 8 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 - 9 = 81 + 27 - 72 - 27 - 9 = 0$
$R(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 - 8 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 9 = 81 - 27 - 72 + 27 - 9 = 0$
Raíces enteras de $R(x)$: 3 y –3

2.76. Utilizando la regla de Ruffini, averigua si $x = 3$ es raíz del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 15$.

¿Tiene más raíces reales? ¿Por qué?

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 8 & -15 \\ 3 & & 3 & -3 & 15 \\ \hline & 1 & -1 & 5 & \mathbf{0} \end{array}$$

Obtenemos resto 0, es decir, $(x - 3)$ es factor de $P(x)$.

El cociente queda: $x^2 - x + 5 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-19}}{2}$

No existe solución; por tanto, $P(x)$ solo tiene un factor de primer grado.

2.77. Escribe un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = -4$.

¿Existen más polinomios que verifiquen esas condiciones? ¿Por qué?

Se tiene que anular en los tres puntos, por ejemplo:

$P(x) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 4) = (x^2 - x - 2) \cdot (x + 4) = x^3 + 4x^2 - x^2 - 4x - 2x - 8 = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

Tendrá las mismas soluciones cualquier polinomio que sea el resultado de multiplicar este por una constante.

2.78. Indica si los valores $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$ son raíces del polinomio $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + 7x - 6$.

$P(2) = 2^5 + 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2 - 6 = 32 + 16 - 56 + 14 - 6 = 0$; $x_1 = 2$ es raíz de este polinomio.

$P(1) = 1^5 + 1^4 - 7 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1 - 6 = 1 + 1 - 7 + 7 - 6 = -4$; $x_2 = 1$ no es raíz de este polinomio.

2.79. ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

a) Si $x + 6$ divide a $L(x)$, entonces 6 es una raíz de $L(x)$.

b) Si $G(-5) = 0$, $x + 5$ es un factor de $G(x)$.

c) Si $B(x)$ es irreducible, existe al menos un valor real $x = a$ para el que $B(a) = 0$.

d) Un polinomio de grado 5 no puede tener 6 raíces.

e) Un polinomio con término independiente 0 posee al menos una raíz real.

f) $x^n + 1$ es irreducible o tiene como única raíz real $x = -1$.

a) Falso, ya que si $(x + 6)$ divide a $L(x)$, entonces -6 es una raíz de $L(x)$.

b) Verdadero, por el teorema del factor.

c) Falso, ya que si existiese un valor tal que $B(a) = 0$, entonces $(x - a)$ dividiría a $B(x)$, y este no sería irreducible.

d) Verdadero, el teorema fundamental del álgebra nos indica que como mucho tendrá 5 raíces.

e) Verdadero, ya que $x = 0$ será una raíz.

f) Verdadero, ya que:

Si n es par, $x^n + 1 = 0 \Rightarrow x^n = -1$ no tiene raíces reales, se puede descomponer en factores de grado 2.

Si n es impar, $x^n + 1 = 0 \Rightarrow x^n = -1 \Rightarrow x = -1$.

2.80. (TIC) Halla el polinomio de cuarto grado cuyo coeficiente principal es 3 y que tiene por raíces $x_1 = 1$ (raíz doble), $x_2 = -2$ y $x_3 = 4$. Desarróllalo.

$(x - 1)^2(x + 2)(x - 4) = 3(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x - 8) = 3(x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 2x^3 + 4x^2 + 16x + x^2 - 2x - 8) =$

$= 3(x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8) = 3x^4 - 12x^3 - 9x^2 + 42x - 24$

2.81. (TIC) Halla las raíces de estos polinomios.

a) $A(x) = 3x^2 + 4x + 1$

b) $B(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

c) $C(x) = 2x^3 - 9x^2 + 4x + 15$

d) $D(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

e) $E(x) = 2x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 7x$

f) $F(x) = x^6 - 1$

a) Posibles raíces enteras: ±1

$A(1) = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 = 8$

$A(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 1 = 0$

$A(x) = (x + 1)(3x + 1)$

Raíces de $A(x)$: –1 y $-\frac{1}{3}$

b) Posibles raíces enteras: ±1, ±3, ±9

$B(1) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 9 = 8$

$B(-1) = (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 9 = 0$

$B(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 9 = 0$

$B(-3) = (-3)^3 - 5 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 9 =$
$= -27 - 35 - 9 + 9 = -72$

$B(9) = 9^3 - 5 \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 + 9 =$

$= 729 - 405 + 27 + 9 = 360$

$B(-9) = (-9)^3 - 5 \cdot (-9)^2 + 3 \cdot (-9) + 9 =$

$= -729 - 405 - 27 + 9 = -1152$

Raíces enteras de $B(x)$: –1 y 3 (doble)

c) Posibles raíces enteras: ±1, ±3, ±5 y ±15

$C(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 15 = 12$

$C(-1) = 2(-1)^3 - 9(-1)^2 + 4(-1) + 15 = 0$

$C(3) = 2 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 15 = 0$

$C(-3) = 2\ (-3)^3 - 9 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 15 =$
$= -54 - 81 - 12 + 15 = -132$

$C(5) = 2 \cdot 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 15 =$

$= 250 - 225 + 20 + 15 = 60$

$C(-5) = 2 \cdot (-5)^3 - 9 \cdot (-5)^2 + 4 \cdot (-5) +$
$+ 15 = -250 - 225 - 20 + 15 = -480$

$C(15) = 2 \cdot 15^3 - 9 \cdot 15^2 + 4 \cdot 15 + 15 =$

$= 6750 - 2025 + 60 + 15 = 4800$

$C(-15) = 2 \cdot (-15)^3 - 9 \cdot (-15)^2 + 4 \cdot (-15) +$
$+ 15 = -6750 - 2025 - 60 + 15 = -8820$

$C(x) = (x + 1)(x - 3)(2x - 5)$

Raíces de $C(x)$: –1, 3 y $\frac{5}{2}$

d) Posibles raíces enteras: ±1, ±3, ±9

$D(1) = 1^4 - 10 \cdot 1^2 + 9 = 0$

$D(-1) = (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^2 + 9 = 0$

$D(3) = 3^4 - 10 \cdot 3^2 + 9 = 0$

$D(-3) = (-3)^4 - 10 \cdot (-3)^2 + 9 = 0$

$D(9) = 9^4 - 10 \cdot 9^2 + 9 = 5760$

$D(-9) = (-9)^4 - 10 \cdot (-9)^2 + 9 = 5760$

Raíces enteras de $B(x)$: ±1 y ±3

e) Posibles raíces enteras: ±1, ±7

$E(1) = 2 \cdot 1^4 - 7 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 = -10$

$E(-1) = 2 \cdot (-1)^4 - 7 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 7 \cdot (-1) =$
$= 18$

$E(7) = 2 \cdot 7^4 - 7 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 - 7 \cdot 7 = 84$

$E(-7) = 2 \cdot (-7)^4 - 7 \cdot (-7)^3 + 2 \cdot (-7)^2 - 7 \cdot (-7) =$
$= -2450$

$E(x) = x(2x - 7)(x - 3)(x^2 + 1)$

Raíces de $E(x)$: 0 y $\frac{7}{2}$

f) Posibles raíces enteras: ±1

$F(1) = 1^6 - 1 = 0$

$F(-1) = (-1)^6 - 1 = 0$

$F(x) = (x + 1)\ (x - 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

Raíces de $F(x)$: ±1

2.82. El polinomio $Q(x)$ tiene grado 3 y se sabe que $Q(-1) = Q(2) = Q(0) = 0$. ¿Cuál es la posible expresión del polinomio $Q(x)$?

Y si además se sabe que $Q(-2) = 16$, ¿cuál es entonces su expresión exacta?

Conociendo las raíces podemos expresar el polinomio como: $Q(x) = k(x+1)(x-2)x = kx^3 - kx^2 - 2kx$.

Calculamos $Q(-2)$ y lo igualamos a 16:

$Q(-2) = k(-2+1)(-2-2)(-2) = k \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot (-2) = -8k \Rightarrow -8k = 16 \Rightarrow k = -2$

$Q(x) = -2 \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot x = -2x^3 + 2x^2 + 4x$

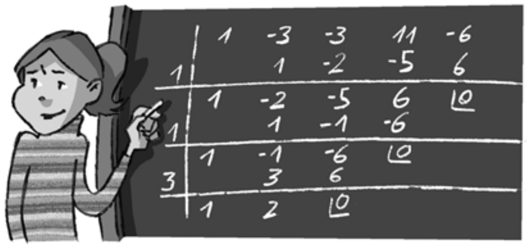
2.83. La suma de las raíces de un polinomio de grado 2 es 2, y su producto, –3. ¿Cuál es el polinomio sabiendo que su coeficiente de grado 2 es 1?

Será de la forma $(x-a)(x-b) = x^2 - ax - bx + ab = x^2 - (a+b)x + ab$.

Sabemos que $a + b = 2$, y $a \cdot b = -3$. Sustituimos: $x^2 - 2x - 3$.

Técnicas de descomposición factorial

2.84. Observa el siguiente esquema y escribe el polinomio inicial y su expresión factorizada.



Al dividir el polinomio entre $(x-1)$, el resto es 0. Dividimos el nuevo cociente otra vez entre $(x-1)$ y el resto vuelve a ser 0. El cociente resultante lo dividimos entre $(x-3)$ y la división es exacta, quedando como cociente $(x+2)$. Por tanto, la factorización será:

$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = (x-1) \cdot (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x+2) = (x-1)^2 \cdot (x-3) \cdot (x+2)$

2.85. (TIC) Expresa los siguientes polinomios como producto de factores irreducibles.

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x$

b) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

c) $R(x) = x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2$

d) $S(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x - 2$

e) $T(x) = 2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 3x$

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x \cdot (x-2) \cdot (x+3)$

b) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x-2) \cdot (x^2 + 5x + 6) = (x-2) \cdot (x+2) \cdot (x+3)$

c) $R(x) = x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2 = x^2(x^3 - x^2 - x - 2) = x^2 \cdot (x-2) \cdot (x^2 + x + 1)$

d) $S(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = (x+1) \cdot (6x^2 - x - 2) = 6(x+1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)$

e) $T(x) = 2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 3x = x \cdot (2x^3 + 7x^2 + 8x + 3) = x \cdot (x+1) \cdot (2x^2 + 5x + 3) =$

$= 2x \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) = 2x \cdot (x+1)^2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)$

2.86. Expresa los siguientes polinomios como producto de factores irreducibles sin hacer ninguna división.

a) $P(x) = x(3x - 4) + 3x - 4$

b) $Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$

c) $R(x) = (x - 2)(x + 3) + x^2 + 6x + 9$

d) $S(x) = x^3 + 7x^2 + 12x$

e) $T(x) = (x^2 - 25) + x^3 + 10x^2 + 25x$

a) $P(x) = x(3x - 4) + 3x - 4 = x(3x - 4) + (3x - 4) \cdot 1 = (3x - 4)(x + 1) = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)(x + 1)$

b) $Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x + 2)(x - 2)(x + 3)(x - 3)$

c) $R(x) = (x - 2)(x + 3) + x^2 + 6x + 9 = (x - 2)(x + 3) + (x + 3)^2 = (x + 3)(x - 2 + x + 3) =$

$= 2(x + 3)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

d) $S(x) = x^3 + 7x^2 + 12x = x(x^2 + 7x + 12) = x(x + 4)(x + 3)$

e) $T(x) = (x^2 - 25) + x^3 + 10x^2 + 25x = (x + 5)(x - 5) + x(x^2 + 10x + 25) = (x + 5)(x - 5) + x(x + 5)^2 =$

$= (x + 5)(x^2 + 6x - 5)$

2.87. Factoriza el polinomio $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 3x - 18$ sabiendo que verifica $P\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, $P(-2) = 0$ y $P(-3) = 0$.

Como conocemos las raíces del polinomio, por el teorema del factor solamente nos falta conocer el coeficiente:

$P(x) = k \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) = k \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right) \cdot (x + 3) = k \cdot \left(x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 9\right) = k \cdot x^3 + \frac{7}{2}k \cdot$

$\cdot x^2 - \frac{3}{2}k \cdot x - 9k$

Igualando coeficientes resulta $k = 2$.

2.88. (TIC) Factoriza el numerador y el denominador para simplificar la fracción algebraica $\frac{L(x)}{R(x)}$, si:

$\boldsymbol{L(x) = 3x^3 - 16x^2 + 17x - 4}$ $\boldsymbol{R(x) = 2x^3 - 13x^2 + 23x - 12}$

	3	–16	17	–4
1		3	–13	4
	3	–13	4	0

$3x^2 - 13x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{13 \pm 11}{6}\begin{cases} 4 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$

$L(x) = 3x^3 - 16x^2 + 17x - 4 = 3\,(x - 1)(x - 4)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

	2	–13	23	–12
1		2	–11	12
	2	–11	12	0

$2x^2 - 11x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm 5}{4}\begin{cases} 4 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$

$R(x) = 2x^3 - 13x^2 + 23x - 12 = 2(x - 1)(x - 4)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$$\frac{L(x)}{R(x)} = \frac{3(x-1)(x-4)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{2(x-1)(x-4)\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)}{2\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{3x - 1}{2x - 3}$$

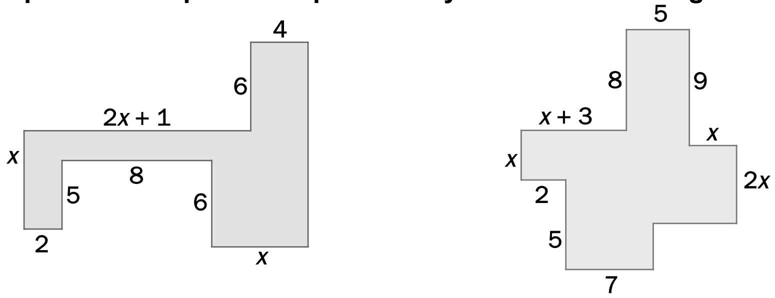
PROBLEMAS

2.89. Relaciona en tu cuaderno las magnitudes indicadas correspondientes a un triángulo equilátero de lado *x* con los monomios de la columna derecha.

Perímetro	$\frac{\sqrt{3}}{2}x$
Área	$3x$
Altura	$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

Perímetro: $3x$ Área: $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ Altura: $\frac{\sqrt{3}}{2}x$

2.90. Encuentra los polinomios que dan el perímetro y el área de estas figuras.



a) Perímetro: $P = 2 + x + (2x + 1) + 6 + 4 + (6 + 6 + (x - 5)) + x + 6 + 8 + 5 = 5x + 43$ u
Área: $A = 2 \cdot x + (2x + 1 - 2)(x - 5) + 6 \cdot 4 + x(6 + (x - 5)) = 2x + 2x - 1 + 24 + x + x^2 =$
$= x^2 + 5x + 23$ u^2

b) Perímetro: $P = 2 + x + (x + 3) + 8 + 5 + 9 + x + 2x + (x + 3 + 5 + x - (2 + 7)) +$
$+ (5 + x + 8 - (9 + 2x)) + 7 + 5 = 6x + 42$ u
Área: $A = 5 \cdot (9 + 2x) + 2x \cdot x + 7 \cdot (5 + x + 8 - (9 + 2x)) + (x + 3)(5 - (5 + x + 8 - (9 + 2x)) + 2 \cdot x =$
$= 45 + 10x + 2x^2 + 7 \cdot (4 - x) + (x + 3)(4 - x) + 2x = 45 + 10x + 2x^2 + 28 - 7x + x + 12 - x^2 + 2x =$
$= x^2 + 6x + 85$ u^2

2.91. Escribe el polinomio que expresa el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son números consecutivos, siendo el mayor de ellos *x*.

Las dimensiones serán x, $x - 1$ y $x - 2$. Por tanto, el volumen queda:

$V = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = x \cdot (x^2 - 3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

2.92. Halla el polinomio de tercer grado que cumple estas tres condiciones.

Su coeficiente principal es 8.

Es divisible por $2x^2 + 1$.

El resto de su división entre $x + 2$ es 56.

Un factor es $(2x^2 + 1)$; para que su coeficiente principal sea 8, multiplicamos el factor por 4. Para que tenga grado 3 deberemos multiplicarlo por un binomio de grado 1 de la forma $(x + b)$, quedando:

$P(x) = 4(2x^2 + 1)(x + b)$.

Aplicamos por último el teorema del resto para calcular b:

$P(-2) = 4\,[2 \cdot (-2)^2 + 1](-2 + b) = 36(-2 + b) = 56 \Rightarrow -2 + b = \frac{56}{36} = \frac{14}{9} \Rightarrow b = \frac{14}{9} + 2 \Rightarrow b = \frac{32}{9}$

Entonces, $P(x) = 4(2x^2 + 1)\left(x + \frac{32}{9}\right)$

2.93. Sean los polinomios $E(x) = 4\pi x^2$, $F(x) = \frac{5}{3}\pi x^2$ y $G(x) = 2\pi x^2 + 10\pi x$, asociados a distintas figuras geométricas. Relaciona en tu cuaderno las cantidades de estas tres columnas.

Volumen de un cono de radio 3 y altura 5	**$G(3)$**	**36π**
Área de un cilindro de altura 5 y radio 3	**$E(3)$**	**15π**
Volumen de una esfera de radio 3	**$F(3)$**	**48π**

Calculamos el valor de los tres polinomios en $x = 3$.

$E(3) = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$

$F(3) = \frac{5}{3}\pi \cdot 3^2 = 15\pi$

$G(3) = 2\pi \cdot 3^2 + 10\pi \cdot 3 = 18\pi + 30\pi = 48\pi$

Calculamos las áreas y los volúmenes:

Volumen de un cono de radio 3 y altura 5 = $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 15\pi$

Área de un cilindro de altura 5 y radio 3 = $2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 18\pi + 30\pi = 48\pi$

Volumen de una esfera de radio 3 = $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$

Por tanto, la relación queda:

Volumen de un cono de radio 3 y altura 5 → $F(3) \rightarrow 15\pi$

Área de un cilindro de altura 5 y radio 3 → $G(3) \rightarrow 48\pi$

Volumen de una esfera de radio 3 → $E(3) \rightarrow 36\pi$

2.94. Calcula *a*, *b* y *c* sabiendo que $x^3 - 6x^2 + ax + b$ es el cubo del binomio $x + c$.

$(x + c)^3 = x^3 + 3x^2c + 3xc^2 + c^3$

Igualamos los coeficientes correspondientes a los términos de igual grado:

$-6 = 3c \Rightarrow c = -2$

$a = 3c^2 \Rightarrow a = 3 \cdot (-2)^2 \Rightarrow a = 12$

$b = c^3 \Rightarrow b = (-2)^3 \Rightarrow b = -8$

2.95. (TIC) Simplifica los siguientes polinomios.

a) $(x - 2)(x + 2) - (x - 3)(x + 3) - x(2x + 1) - 4$

b) $(x^2 + 2x + 1)(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1) - x^6 + 2x^3$

a) $(x - 2)(x + 2) - (x - 3)(x + 3) - x(2x + 1) - 4 = x^2 - 4 - x^2 + 9 - 2x^2 - x - 4 = -2x^2 - x + 1$

b) $(x^2 + 2x + 1)(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1) - x^6 + 2x^3 = x^6 - 2x^5 + 3x^4 + x^2 + 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 2x + x^4 - 2x^3 +$
$+ 3x^2 + 1 - x^6 + 2x^3 = 6x^3 + 4x^2 + 2x + 1$

2.96. (TIC) Calcula los valores de *a* y *b* necesarios para que se cumplan estas igualdades.

a) $x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 1)$

b) $x^6 - x^5 - 2x^4 - 4x^2 + 4x + 8 = (x^2 - x - 2)(x^4 + ax^3 + bx - 4)$

Multiplicamos e igualamos los coeficientes:

a) $(x - 2)(x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 1) = x^5 + ax^4 + bx^3 + 2x^2 + x - 2x^4 - 2ax^3 - 2bx^2 - 4x - 2 =$

$= x^5 + (a - 2)x^4 + (b - 2a)x^3 + (2 - 2b)x^2 - 3x - 2$

$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

$b - 2a = -5 \Rightarrow b - 2 \cdot 2 = -5 \Rightarrow b = -1$

$2 - 2b = 4$. Vemos que es correcta con los valores que habíamos obtenido.

b) $(x^2 - x - 2)(x^4 + ax^3 + bx - 4) = x^6 + ax^5 + bx^3 - 4x^2 - x^5 - ax^4 - bx^2 + 4x - 2x^4 - 2ax^3 - 2bx + 8 =$

$= x^6 + (a - 1)x^5 - (a + 2)x^4 + (b - 2a)x^3 - (4 + b)x^2 + (4 - 2b)x + 8$

$a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0$

$-a - 2 = -2$ sirve de comprobación.

$b - 2a = 0 \Rightarrow b = 2a \Rightarrow b = 0$

$-4 - b = -4$ sirve de comprobación.

$4 - 2b = 4$ sirve de comprobación.

2.97. Halla un polinomio de segundo grado, *R*(*x*), que cumpla *R*(1) = 5, *R*(–1) = 9 y *R*(0) = 4.

$R(x)$ será de la forma $R(x) = ax^2 + bx + c$; veamos qué valores toma en cada punto:

$R(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c = 5$

$R(-1) = a(-1)^2 + b \cdot (-1) + c = a - b + c = 9$

$R(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c = 4$

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=5 \\ a-b+c=9 \\ c=4 \end{array}\right\} 2a + 2c = 14 \Rightarrow 2a + 2 \cdot 4 = 14 \Rightarrow 2a = 14 - 8 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3,\ 2b = -4 \Rightarrow b = -2$$

El polinomio resultante es $R(x) = 3x^2 - 2x + 4$.

2.98. Halla los valores de *a* y *b* para que los restos de las divisiones del producto $(ax^2 + bx)(x - 3)$ entre $(x - 1)$ y $(x + 1)$ sean, respectivamente, –6 y –2.

Utilizamos el teorema del resto, calculando el valor del polinomio en 1 y –1, e igualándolos a los valores del resto que nos da el enunciado.

$P(1) = (a \cdot 1^2 + b \cdot 1) \cdot (1 - 3) = (-2) \cdot (a + b) = -6 \Rightarrow a + b = 3$

$P(-1) = [a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1)] \cdot (-1 - 3) = (-4) \cdot (a - b) = -2 \Rightarrow a - b = \frac{1}{2}$

$2a = 3 + \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{4}$

$2b = 3 - \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{5}{4}$

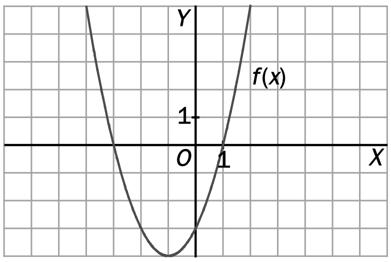
2.99. Si el polinomio $P(x) = x^2 - kx + t$ tiene una raíz doble en $x = 2$, ¿cuánto valen *k* y *t*?

Raíz doble en $x = 2 \Rightarrow P(x) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

Igualamos al polinomio $x^2 - kx + t = x^2 - 4x + 4$.

Igualamos coeficientes: $k = 4$, $t = 4$.

2.100. Observa la gráfica de $y = f(x)$ y halla las raíces del polinomio $f(x) = x^2 + 2x - 3$.



Las raíces de este polinomio coinciden con los puntos de corte de la gráfica con el eje X, es decir, $x = 1$ y $x = -3$.

2.101. Utiliza la notación polinómica para demostrar que si n es un entero positivo, entonces se puede construir un triángulo rectángulo de catetos $a = 2n + 1$ y $b = 2n^2 + 2n$ cuya hipotenusa es también un número entero.

Hipotenusa:

$$[H(n)]^2 = (2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 + 4n^2 + 4n + 1 = 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1$$

$$= (2n^2 + 2n + 1)^2 \Rightarrow H(n) = 2n^2 + 2n + 1$$

La hipotenusa es un número entero.

2.102. Estudia el signo de este polinomio por el procedimiento que se indica a continuación.

$Q(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$

a) Encuentra sus raíces.

b) Divide la recta real en los intervalos que tienen por extremos dichas raíces.

c) Elige un punto en cada uno de esos intervalos y calcula el valor numérico de $Q(x)$ en ese punto. El signo de este valor numérico es el de $Q(x)$ en todo el intervalo.

a) Ceros en $x = -2$, $x = 1$ y $x = 3$

b) Intervalos $x \leq -2$, $-2 < x \leq 1$, $1 < x \leq 3$, $x > 3$ (la respuesta no es única, ya que el valor "=" se puede considerar en un intervalo o en el siguiente).

c) Aunque el punto elegido y el valor obtenido en cada intervalo no tienen por qué coincidir, el signo sí.

$x = -3 \Rightarrow Q(-3) = (-3 + 2)(-3 - 1)(-3 - 3) = (-1) \cdot (-4) \cdot (-6) < 0 \Rightarrow$ para $x \leq -2$. $Q(x)$ es negativo.

$x = 0 \Rightarrow Q(0) = (0 + 2)(0 - 1)(0 - 3) = 2 \cdot (-1) \cdot (-3) > 0 \Rightarrow$ para $-2 < x \leq 1$. $Q(x)$ es positivo.

$x = 2 \Rightarrow Q(2) = (2 + 2)(2 - 1)(2 - 3) = 4 \cdot 1 \cdot (-1) < 0 \Rightarrow$ para $1 < x \leq 3$. $Q(x)$ es negativo.

$x = 4 \Rightarrow Q(4) = (4 + 2)(4 - 1)(4 - 3) = 6 \cdot 3 \cdot 1 > 0 \Rightarrow$ para $x > 3$. $Q(x)$ es positivo.

2.103. La expresión que da la posición, *s*, de un objeto que sigue un movimiento uniformemente acelerado es:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + s_o$$

donde *a* es la aceleración; v_o, la velocidad inicial; s_o, la posición inicial, y *t*, el tiempo.

a) ¿Puede el polinomio $M(t) = 5t^2 + 6t + 3$ describir un movimiento uniformemente acelerado? Identifica en caso afirmativo los valores de *a*, v_o y s_o.

b) ¿Puede el monomio $T(t) = 4{,}9t^2$ corresponder a un cuerpo que se deja caer en el vacío? ¿Por qué? ¿Cuál es el valor de *a* en este caso?

a) $M(t)$ puede identificar un movimiento uniformemente acelerado donde:

$\frac{1}{2}a = 5 \Rightarrow a = 10$; $v_0 = 6$; $s_0 = 3$

b) Vamos a identificar los valores.

$\frac{1}{2}a = 4{,}9 \Rightarrow a = 9{,}8$ (valor correspondiente a la gravedad, en el sistema de referencia en que es positiva hacia abajo.)

$v_0 = 0$ (parte de velocidad inicial nula)

$s_0 = 0$ (cuando comienza a caer no ha recorrido ningún espacio)

2.104. (TIC) Un Ayuntamiento con problemas de abastecimiento de agua quiere construir un depósito metálico para acumular agua de un trasvase.

Han decidido que el depósito tendrá forma de prisma de base cuadrada y carecerá de tapa.

Disponen de una pieza cuadrada de metal de 20 por 20 metros de la que cortan cuatro cuadrados de lado *x* en las cuatro esquinas y levantan los cuatro rectángulos resultantes para formar los laterales del depósito, soldando las esquinas.

a) ¿Qué polinomio *V*(*x*) expresa el volumen que puede acumular el depósito?

b) Halla los valores numéricos de *V* en *x* = 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, y después dibuja los puntos (*x*, *V*(*x*)).

c) ¿Podrías averiguar para qué valor de *x* el depósito tiene el máximo volumen?

a) Área de la base: $(20 - 2x) \cdot (20 - 2x)$; altura: $x \Rightarrow$

$\Rightarrow V(x) = (20 - 2x)^2 \cdot x$

b) $x = 0 \Rightarrow V(0) = (20 - 2 \cdot 0)^2 \cdot 0 = 0$

$x = 1 \Rightarrow V(1) = (20 - 2 \cdot 1)^2 \cdot 1 = 324$

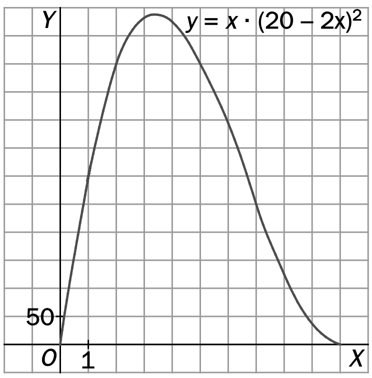
$x = 2 \Rightarrow V(2) = (20 - 2 \cdot 2)^2 \cdot 2 = 512$

$x = 3 \Rightarrow V(3) = (20 - 2 \cdot 3)^2 \cdot 3 = 588$

$x = 4 \Rightarrow V(4) = (20 - 2 \cdot 4)^2 \cdot 4 = 576$

$x = 5 \Rightarrow V(5) = (20 - 2 \cdot 5)^2 \cdot 5 = 500$

$x = 6 \Rightarrow V(6) = (20 - 2 \cdot 6)^2 \cdot 6 = 384$



c) En la gráfica podemos apreciar que cerca de *x* = 3 el volumen del depósito es máximo.

AMPLIACIÓN

2.105. ¿Cuál es la suma de todas las raíces del polinomio $(2x + 3)(x - 4) + (2x + 3)(x - 6)$?

a) 3,5 b) 4 c) 5 d) 7

Escribiendo el polinomio dado como $(2x + 3)(2x - 10)$, sus raíces son $-\frac{3}{2}$ y 5, y su suma será $\frac{7}{2}$.

La solución es la a.

2.106. El polinomio $ax^3 - 60x^2 + bx - 125$ es el cubo de un binomio. El producto de *a* y *b* es:

a) 150 b) 300 c) 750 d) 1200

El binomio en cuestión será $\sqrt[3]{a}\,x - 5$, con lo que $\left(\sqrt[3]{a}\,x - 5\right)^3 = ax^3 - 15\sqrt[3]{a^2}\,x^2 + 75\sqrt[3]{a}\,x - 125$, por lo que $-15\sqrt[3]{a^2} = -60$ y $75\sqrt[3]{a} = b$, así que $a = 8$ y $b = 150$, con lo que $a \cdot b = 1200$. La solución es la d.

2.107. Al dividir el polinomio $P(x)$ entre el binomio $(x^2 - 1)$, el resto que se obtiene es $4x + 4$. ¿Cuál es el resto de dividir $P(x)$ entre $(x - 1)$?

a) 0 b) $-4x - 4$ c) -4 d) 8

Nos dicen que $P(x) = c(x)(x^2 - 1) + (4x + 4)$ y nos piden el resto de la división de $P(x)$ entre $x - 1$, es decir, $P(1)$.

Poniendo 1 en lugar de *x* en la igualdad anterior, resulta que $P(1) = 8$. La solución es la d.

2.108. Considera los polinomios $P(x) = x^4 + x^2 + 16$, $Q(x) = x^8 + x^4 + 16x$, $R(x) = x^2 + 10x + 20$ y $S(x) = \left(2x^2 + 6x + 1\right)^2 - \left(2x^2 - x + 1\right)^2$. ¿Cuántos tienen al menos una raíz real?

a) 5 b) 3 c) 2 d) 1

$P(x)$ no tiene ninguna raíz real, pues $P(x) > 0$ sea cual fuere *x*, real. $Q(x) = x(x^7 + x^3 + 16)$ y $x = 0$ es raíz de dicho polinomio. $R(x)$ tiene dos raíces reales y, finalmente, $S(x) = (4x^2 + 5x + 2)(7x)$, que tiene raíces reales. Así pues, la respuesta es 3, el apartado b.

2.109. El polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene la propiedad de que la media aritmética de sus raíces, el producto de sus raíces y la suma de sus coeficientes son iguales. Si $P(0) = 2$, ¿cuál es el valor de *b*?

a) -11 b) -10 c) -9 d) 1

Llamando x_1, x_2 y x_3 a las raíces de $P(x)$, tenemos que $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$, así que $x_1 + x_2 + x_3 = -a$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b$ y $x_1x_2x_3 = -c$. Nos dicen que $P(0) = 2$; $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = x_1x_2x_3 = 1 + a + b + c$. Así pues, $c = 2$; $-\frac{a}{3} = -c = 1 + a + b + c$, con lo que $a = 6$ y $b = -11$. La respuesta correcta es la a.

AUTOEVALUACIÓN

2.1. Transcribe las siguientes expresiones verbales al lenguaje algebraico.

a) La multiplicación de tres números consecutivos.

b) El perímetro de un rectángulo de base *b* y altura *h*.

a) $x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$

b) $2b + 2h$

2.2. Calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = \frac{x^3}{2} - 2(x^2 - 1)$ para $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$.

$$P(2) = \frac{2^3}{2} - 2(2^2 - 1) = 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$P(-1) = \frac{(-1)^3}{2} - 2((-1)^2 - 1) = \frac{-1}{2}$$

2.3. Si $P(x) = 3x^2 - 2x + 4$, $Q(x) = -2x^3 - x^2 + 5x - 1$ y $R(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2$, calcula:

a) $P(x) - Q(x) + R(x)$

b) $P(x) \cdot (Q(x) + R(x))$

¿Qué grado tienen los polinomios resultantes?

a) $P(x) - Q(x) + R(x) = (3x^2 - 2x + 4) - (-2x^3 - x^2 + 5x - 1) + (x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2) =$

$= 3x^2 - 2x + 4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 1 + x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = x^4 + x^3 + 8x^2 - 4x + 3 \Rightarrow$ Grado 4

b) $P(x) \cdot (Q(x) + R(x)) = (3x^2 - 2x + 4) \cdot ((-2x^3 - x^2 + 5x - 1) + (x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2)) =$

$= (3x^2 - 2x + 4) \cdot (x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 8x - 3) =$

$= 3x^6 - 9x^5 + 9x^4 + 24x^3 - 9x^2 - 2x^5 + 6x^4 - 6x^3 - 16x^2 + 6x + 4x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 32x - 12 =$

$= 3x^6 - 11x^5 + 19x^4 + 6x^3 - 13x^2 + 38x - 12 \Rightarrow$ Grado 6

2.4. Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(5x^4 - 3x^2 + x - 1) : (x^3 - x - 1)$

b) $(4x^3 - 2x + 2) : (x^2 + x + 1)$

¿Podrías aplicar la regla de Ruffini? ¿Por qué?

a)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
5x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & x^3 - x - 1 \\ \cline{6-6}
-5x^4 & & +5x^2 & +5x & & 5x \\ \cline{1-4}
 & & +2x^2 & +6x & -1 &
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & & -2x & +2 & x^2 + x + 1 \\ \cline{5-5}
-4x^3 & -4x^2 & -4x & & 4x - 4 \\ \cline{1-3}
 & -4x^2 & -6x & +2 & \\
 & 4x^2 & +4x & +4 & \\ \cline{2-4}
 & & -2x & +6 &
\end{array}$$

No se puede aplicar Ruffini porque los divisores no tienen grado 1.

2.5. Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini e indica el cociente y el resto.

a) $(2x^3 + 4x^2 - 5x - 3) : (x - 2)$ **b)** $(x^4 - 3x^2 + 4x - 2) : (x + 3)$

a)

	2	4	–5	–3
2		4	16	22
	2	8	11	**19**

Cociente: $2x^2 + 8x + 11$

Resto: 19

b)

	1	0	–3	4	–2
–3		–3	9	–18	42
	1	–3	6	–14	**40**

Cociente: $x^3 - 3x^2 + 6x - 14$

Resto: 40

2.6. El desarrollo del cuadrado del binomio $(3ab - c)^2$ corresponde a:

a) $9a^2b^2 - c^2$

b) $9a^2b^2 - 6abc + c^2$

c) $9a^2b^2 + 6abc + c^2$

Apartado b.

2.7. Indica a cuál de las siguientes expresiones corresponde el desarrollo de la suma por diferencia $(2x^2y + 3y^2z)(2x^2y - 3y^2z)$.

a) $4x^4y^2 + 9y^4z^2$

b) $4x^2y - 9y^2z$

c) $4x^4y^2 - 9y^4z^2$

Apartado c.

2.8. Calcula el valor que debe tener *k* para que el polinomio $P(x) = x^5 + kx^4 + x^3 - 4x^2 + x - 4$ sea divisible entre *x* – 4.

$P(4) = 4^5 + k \cdot 4^4 + 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 4 - 4 = 1024 + 256 \cdot k + 64 - 64 + 4 - 4 = 1024 + 256k = 0$;

$1024 = -256k$; $k = -4$

2.9. ¿Es *x* + 1 un factor del polinomio $x^{71} - 1$? Razona tu respuesta.

$P(-1) = (-1)^{71} - 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$; por tanto, no es factor.

2.10. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 6x^3 + 13x^2 - 13x - 20$

b) $Q(x) = x^5 + x^4 - 5x^2 - 11x - 6$

c) $R(x) = x^3 + 9x^2 + 26x + 24$

a)

	6	13	–13	–20
–1		–6	–7	20
	6	7	–20	**0**

$6x^2 + 7x - 20 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 + 4 \cdot 6 \cdot 20}}{2 \cdot 6} = \dfrac{-7 \pm 23}{12} \begin{cases} \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{-5}{2} \end{cases}$

$P(x) = 6x^3 + 13x^2 - 13x - 20 = (x + 1)(6x^2 + 7x - 20) = 6(x + 1)\left(x - \dfrac{4}{3}\right)\left(x + \dfrac{5}{2}\right)$

b)

	1	1	0	–5	–11	–6
–1		–1	0	0	5	6
	1	0	0	–5	–6	**0**

	1	0	0	–5	–6
–1		–1	1	–1	6
	1	–1	1	–6	**0**

	1	–1	1	–6
2		2	2	6
	1	1	3	**0**

$x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2}$

No tiene solución.

$Q(x) = x^5 + x^4 - 5x^2 - 11x - 6 = (x + 1)(x^4 - 5x - 6) = (x + 1)(x + 1)(x^3 - x^2 + x - 6) =$
$= (x + 1)^2(x - 2)(x^2 + x + 3)$

c)

	1	9	26	24
–2		–2	–14	–24
	1	7	12	**0**

$x^2 + 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \dfrac{-7 \pm 1}{2} \begin{cases} -3 \\ -4 \end{cases}$

$R(x) = x^3 + 9x^2 + 26x + 24 = (x + 2)(x^2 + 7x + 12) = (x + 2)(x + 3)(x + 4)$

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Aprende a pensar > **Encriptación polinómica**

En muchas ocasiones se necesita enviar un mensaje a otra persona de manera que si es interceptado por una tercera, esta no pueda entender lo que dice. El proceso de codificar un mensaje se llama "encriptación", y hay muchos sistemas para llevarlo a cabo. Ahora utilizarás los polinomios para encriptar mensajes.

En primer lugar necesitas convertir cada letra en un número. Para ello utiliza la siguiente tabla de equivalencia.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	¿	?
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Para encriptar mensajes emplearás un sistema de sustitución en el que la clave es el polinomio que asigna a cada letra del alfabeto otra letra. Aunque puedes encriptar a mano, una calculadora o un ordenador pueden resultarte muy útiles.

2.1. El cifrado César consiste en sustituir cada letra por la que ocupa 3 posiciones más adelante en el alfabeto. Es decir, su clave es el polinomio $P(x) = x + 3$. Si al aplicar $P(x)$ al número asociado a una letra obtienes un número mayor que 28, continúa por el comienzo de la tabla; es decir, divide entre 29 y toma el resto.

Utilizando el cifrado César:

a) Encripta el mensaje "La suerte está echada".

b) Desencripta "Glñh d wx dor txh hp Fhvdu vrñr odpgd Fhvdu".

c) Ambas son frases atribuidas a Julio César. Averigua en qué contexto las dijo y por qué.

a) "Ñd vxhuwh hvwd hfkdgd".

b) "Dile a tu amo que en César solo manda César".

c) Tras la conquista de la Galia, al volver a Roma, las tropas de César tenían que cruzar el río Rubicón, que estaba prohibido para el ejército romano. César se adelantó y al otro lado dijo: "Alea iacta est".

La segunda frase iba dirigida a un mensajero de Sila que traía la orden del dictador para que César se divorciara de su esposa, Cornelia.

2.2. Para que sea más difícil descifrar los mensajes se utilizan claves más complejas, como el polinomio $P(x) = x^3 + 2$.

Para cifrar la letra E se procede así: como E equivale a 4, se hace $P(4) = 4^3 + 2 = 66 = 2 \cdot 29 + 8$. Como 8 (que es el resto de dividir 66 entre 29) equivale a I, se sustituye la E por la I.

Utilizando esta clave:

a) Encripta la frase de Woody Allen: "El eco siempre dice la última palabra".

b) Desencripta otra frase del mismo autor: "?nq snqñmu¿nq smifix ix¿fi cj?cmqnq".

a) "I? ikn quisjfi auki ?c m?¿usc jc?cdfc".

b) "Los mosquitos mueren entre aplausos".

2.3. Algunos polinomios sirven como claves para encriptar con este método, como $P(x) = 3x + 1$, y otros no, como $Q(x) = x^2 + 1$. ¿A qué se debe?

Se debe a que no es una correspondencia biunívoca, y a letras diferentes les correspondería en la encriptación el mismo signo. Por ejemplo:

Ñ $\leftrightarrow$ 14 $f(14) = 14^2 + 1 = 197 = 6 \cdot 29 + 23$ y $23 \leftrightarrow$ W

Pero también:

O $\leftrightarrow$ 15 $f(15) = 15^2 + 1 = 226 = 7 \cdot 29 + 23$ y $23 \leftrightarrow$ W

Lo mismo ocurre con N y P, que al encriptarlas se transforman en Y.

2.4. Ahora inventa tu propia clave, encripta un mensaje y pásalo a un compañero para que lo descifre. ¡Ojo, necesitará la clave!

Respuesta abierta.

2.5. Dado que puede utilizarse para fines terroristas o contra la seguridad del Estado, muchos países prohíben o limitan el uso de la criptografía más avanzada, hasta el punto de obligar a entregar a las autoridades todos los métodos y claves de encriptación.

Muchas personas consideran que esto vulnera su derecho a la intimidad y la libertad de expresión.

¿Qué opinas tú? Entra en http://matematicas20.aprenderapensar.net y participa en el debate.

Respuesta abierta.

Calcula y descubre > Cuenta con los polinomios

Todos los sistemas de numeración utilizan símbolos (puntos, rayas, letras, dibujos, guarismos…) con distintos valores para representar diferentes cantidades. Los sistemas que se utilizan hoy día en casi todo el mundo son posicionales, lo que significa que el valor de cada símbolo depende de su posición dentro del número. Así, el 9 de 195 significa "noventa", o 9 decenas, pero el 9 de 9341 significa "nueve mil", o 9 millares.

En los sistemas de numeración posicional se utilizan diferentes bases. Las más comunes son:

- **Decimal (base 10). Es la que utilizamos y se deriva de que tenemos 10 dedos en las manos (de ahí la palabra "dígito"). Consta de 10 cifras o guarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.**
- **Binario (base 2). La utilizan los ordenadores, porque en sus circuitos hay dos posibilidades: 0 (no pasa corriente) o 1 (pasa corriente). Por tanto, solo hay dos cifras: 0 y 1.**
- **Octal (base 8). La utilizan algunos nativos americanos, porque cuentan con los huecos entre los dedos. Consta de 8 cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.**
- **Hexadecimal (base 16). Consta de 16 cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E y F (donde A tiene el valor de 10, B el de 11, …, y F el de 15). Se utiliza en informática.**

Cualquier número natural *N* escrito en una base *k* se puede representar mediante una expresión polinómica:

$$N = a_n \cdot k^n + a_{n-1} \cdot k^{n-1} + ... + a_2 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^1 + a_0 \cdot k^0 = (a_n\, a_{n-1} ... a_2\, a_1\, a_0)_k$$

Así, por ejemplo, el número 319 en las bases 10, 2, 8 y 16 es:

- $319_{10} = 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 9 = 300 + 10 + 9$
- $100111111_2 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 256 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 319$
- $477_8 = 4 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 7 = 256 + 56 + 7 = 319$
- $13F_{16} = 1 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 15 = 256 + 48 + 15 = 319$

Como ves, para convertir un número de una base a otra, basta con expresarlo como una suma de potencias.

2.6. El número $13\,422_5$ está escrito en base 5. Escribe su expresión polinómica y desarróllala para determinar a qué número en base 10 equivale.

$13422_5 = 1 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 2 = 1112$

2.7. **Expresa el número 1348_{10} en las bases 5, 8 y 16.**

$$1348_{10} = 1250 + 75 + 20 + 3 = 2\cdot 5^4 + 0\cdot 5^3 + 3\cdot 5^2 + 4\cdot 5 + 3 = 20343_5$$

$$1348_{10} = 1024 + 320 + 4 = 2\cdot 8^3 + 5\cdot 8^2 + 0\cdot 8 + 4 = 2504_8$$

$$1348_{10} = 1280 + 64 + 4 = 5\cdot 16^2 + 4\cdot 16 + 4 = 544_{16}$$

2.8. **Aunque el sistema decimal nos parece el natural, esto solo se debe a la costumbre. En realidad, otros sistemas tienen más ventajas. Para comprobarlo, observa la expresión tan sencilla que tiene el número $61\,440_{10}$ en hexadecimal.**

$61440_{10} = F000_{16}$

2.9. **El sistema decimal no siempre ha sido el más común en Europa. En francés, 99 todavía se dice *quatre-vingt-dix-neuf*, es decir, "cuatro veinte diecinueve". ¿Qué base utilizaban? Expresa este número en la base adecuada inventando los símbolos que necesites. ¿Cuántas cifras ocupa?**

La base es 20. Las cifras, o símbolos, son: 0, 1, 2, …, 9, A, B,…, I, J.

$99_{10} = 4J_{20}$

2.10. **Investiga las bases que se han utilizado en los sistemas de numeración posicionales de diferentes culturas y realiza una síntesis en la que expliques a qué se deben. Una ayuda: www.e-sm.net/4esoz07.**

Respuesta abierta.

Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **Juan Jesús Donaire, Vanesa Fernández, Pedro Lomas, Juan Alberto Torresano, Ana María Álvarez, Mariano García, Marta Marcos, Carolina Puente, Joaquín Hernández, María Moreno, Esteban Serrano**

Edición: **Arturo García, Eva Béjar**

Revisión contenidos: **Miguel Nieto**

Corrección: **Ricardo Ramírez**

Ilustración: **Modesto Arregui, Jurado y Rivas, Estudio “Haciendo el león”, Félix Anaya, Juan Francisco Cobos, José Santos**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**

Impreso en España – *Printed in Spain*