# 1 Números reales

## ACTIVIDADES INICIALES

**1.I. Si cada grado de la escala de Richter supone 10 veces más potencia que el anterior, ¿cuántas veces más destructivo es un terremoto de escala 9 que uno de 2?**

$\frac{10^9}{10^2} = 10^7$, es decir, 10 millones de veces más destructivo.

**1.II. ¿Qué es un sismógrafo y para qué sirve? ¿Por qué crees que en los museos de arte hay sismógrafos?**

Un sismógrafo es un aparato que sirve para registrar la amplitud de las oscilaciones de un temblor de tierra, ya sea un terremoto o, por ejemplo, una explosión nuclear.

En los museos hay sismógrafos para proteger las obras de arte ante cualquier posible riesgo de terremoto.

**1.III. Cuando un terremoto de gran intensidad ocurre en el mar, se produce un fenómeno también muy destructivo. ¿Qué nombre recibe?**

Cuando un terremoto se produce bajo la superficie del mar recibe el nombre de maremoto y suele provocar olas gigantescas y muy destructivas conocidas como *tsunamis*.

## ACTIVIDADES PROPUESTAS

**1.1. Actividad resuelta.**

**1.2. ¿Cómo es el desarrollo decimal de los siguientes números racionales?**

**a)** $\frac{73}{2^2 \cdot 5^3}$ **b)** $\frac{27}{12}$ **c)** $\frac{101}{120}$

a) $\frac{73}{2^2 \cdot 5^3}$ Finito b) $\frac{27}{12} = \frac{9}{4}$ Finito c) $\frac{101}{120} = \frac{101}{2^3 \cdot 3 \cdot 5}$ Periódico

**1.3. Escribe un número irracional que solo tenga las cifras 3 y 4.**

4,343343334333343…

**1.4. Halla dos números irracionales cuya suma sea racional. Y dos irracionales cuya suma sea irracional.**

- $\sqrt{2}$ y $5-\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}+5-\sqrt{2}=5$ Racional
- 0,100100010000… y 0,200200020000… $\Rightarrow$

  $\Rightarrow$ 0,100100010000… + 0,200200020000… = 0,30030003… Irracional

**1.5. Encuentra una fracción comprendida entre $\frac{17}{26}$ y $\frac{18}{26}$. A continuación encuentra un irracional comprendido también entre esas dos fracciones.**

$\frac{17}{26} = \frac{34}{52} \cong 0{,}654$ Racional: $\frac{35}{52}$

$\frac{18}{26} = \frac{36}{52} \cong 0{,}692$ Irracional: 0,6656665666656…

**1.6. Actividad resuelta.**

**1.7. Escribe el truncamiento y el redondeo del número π hasta la centésima, la milésima y la diezmilésima.**

$\pi \cong 3{,}1415926\ldots$

| **Orden** | Centésima | Milésima | Diezmilésima |
|---|---|---|---|
| **Truncamiento** | 3,14 | 3,141 | 3,1415 |
| **Redondeo** | 3,14 | 3,142 | 3,1416 |

**1.8. Encuentra un número que cumpla la siguiente condición: que su redondeo a la diezmilésima coincida con su aproximación por exceso de ese orden.**

1,23456

**1.9. Escribe un número irracional cuyo truncamiento a la milésima sea 2,45.**

2,450450045000450000…

**1.10. ¿Qué aproximación es peor, tomar 1260 en lugar de 1258 o tomar 5 en lugar de 5,1?**

Es peor aproximación 5 de 5,1, pues el error relativo en el primer caso es $\frac{2}{1258} \cong 0{,}002$, y en el segundo, $\frac{0{,}1}{5{,}1} \cong 0{,}02$.

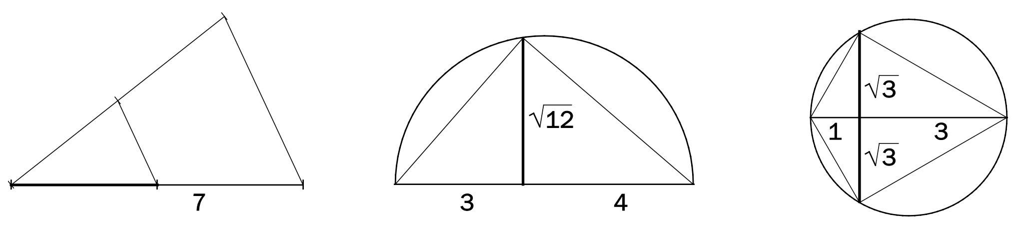
**1.11. Calcula los errores absoluto y relativo obtenidos al tomar como número π la fracción $\frac{355}{113}$.**

$\frac{355}{113} \cong 3{,}14159292035398230088495575221224$

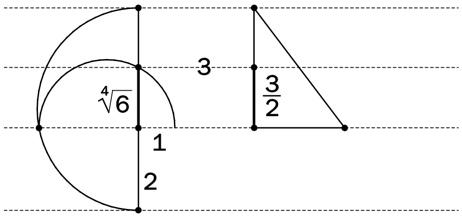
Error absoluto $\cong$ 0,000000267

Error relativo $\cong$ 0,000000085

**1.12. Representa los números $\frac{7}{2}$, $\sqrt{12}$, $2\sqrt{3}$.**

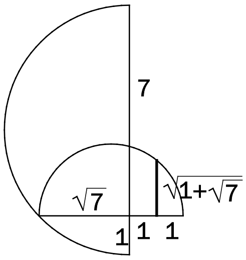


**1.13. (TIC) ¿Qué es mayor, $\sqrt[4]{6}$ o $\dfrac{3}{2}$? Represéntalos.**



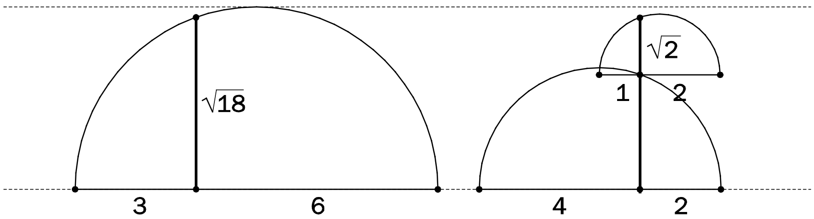

$\sqrt[4]{6} > \dfrac{3}{2}$

**1.14. Represanta un segmento que mida $\sqrt{1+\sqrt{7}}$ .**




**1.15. (TIC) En el siglo XII, el matemático indio Bhaskara aseguró que: $\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{18}$**

**Dibuja un segmento de longitud $\sqrt{8}+\sqrt{2}$ y otro de longitud $\sqrt{18}$ , y compruébalo.**




Son iguales.

**1.16. Actividad resuelta.**

**1.17. Escribe como semirrectas o intervalos:**

| | | |
|---|---|---|
| **a)** $x \geq -3$ | **c)** $x < 7$ y $x > -8$ | **e)** $7 < x$ y $x \geq 9$ |
| **b)** $-5 \leq x < 7$ | **d)** $8 > x$ | **f)** $x < -3$ y $x \geq 1$ |
| a) $[-3, +\infty)$ | c) $(-8, 7)$ | e) $[9, +\infty)$ |
| b) $[-5, 7)$ | d) $(-\infty, 8)$ | f) $\varnothing$ |

**1.18. Calcula $\left|4-|3-1|+|2-5|\right|$.**

$\left|4-|3-1|+|2-5|\right| = |4-2+3| = 5$

**1.19. ¿Qué números reales $x$ cumplen $|x-1| \leq 5$ ?**

Son aquellos que del 1 distan 5 o menos de 5, es decir, entre el 1 – 5 = –4 y el 1 + 5 = 6.

El intervalo $[-4, 6]$

**1.20. Escribe el intervalo formado por los números *x* que verifican simultáneamente:**

**a) *x* está en el entorno de centro 4 y radio 2.**

**b) $|x-1| \leq 3$**

Por la condición a, *x* debe estar comprendido entre 2 y 6. Por la condición b, *x* debe estar comprendido entre 1 + 3 = 4 y 1 – 3 = –2.

El intervalo es (2, 4].

En el enunciado no se aclara si el entorno es abierto o cerrado. Aquí se ha tomado abierto.

**1.21. Actividad resuelta.**

**1.22. Simplifica al máximo estas expresiones.**

**a)** $\dfrac{4\cdot\left(10^{-2}\right)^{3}\cdot 10^{2}}{12\cdot 10^{-3}}$ **c)** $\dfrac{25\cdot\left(10^{2}\right)^{-5}\cdot 121}{11\cdot 75\cdot 10^{-9}}$

**b)** $\dfrac{12\cdot 10^{-1}\cdot 20^{4}}{50\cdot\left(16^{-2}\right)^{-3}}$ **d)** $\dfrac{\left(18^{2}\right)^{-2}\cdot 81}{6^{3}\cdot 108\cdot(24)^{-4}}$

a) $\dfrac{4\cdot\left(10^{-2}\right)^{3}\cdot 10^{2}}{12\cdot 10^{-3}}=\dfrac{10^{-6}\cdot 10^{2}}{3\cdot 10^{-3}}=\dfrac{1}{30}$

b) $\dfrac{12\cdot 10^{-1}\cdot 20^{4}}{50\cdot\left(16^{-2}\right)^{-3}}=\dfrac{3\cdot 2^{2}\cdot 10^{-1}\cdot 2^{4}\cdot 10^{4}}{5\cdot 10\cdot\left(2^{4}\right)^{6}}=\dfrac{3\cdot 10^{2}}{5\cdot 2^{18}}=\dfrac{3\cdot 2^{2}\cdot 5^{2}}{5\cdot 2^{18}}=\dfrac{3\cdot 5}{2^{16}}=\dfrac{15}{65536}$

c) $\dfrac{25\cdot\left(10^{2}\right)^{-5}\cdot 121}{11\cdot 75\cdot 10^{-9}}=\dfrac{5^{2}\cdot 10^{-10}\cdot 11^{2}}{11\cdot 3\cdot 5^{2}\cdot 10^{-9}}=\dfrac{11}{3\cdot 10}=\dfrac{11}{30}$

d) $\dfrac{\left(18^{2}\right)^{-2}\cdot 81}{6^{3}\cdot 108\cdot(24)^{-4}}=\dfrac{\left(2\cdot 3^{2}\right)^{-4}\cdot 3^{4}}{2^{3}\cdot 3^{3}\cdot 2^{2}\cdot 3^{3}\cdot\left(2^{3}\cdot 3\right)^{-4}}=\dfrac{2^{3}}{3^{6}}=\dfrac{8}{729}$

**1.23. Escribe los siguientes números como potencias de 10.**

**a)** $\dfrac{\left(0{,}0001^{-2}\right)^{3}\cdot 100^{2}}{0{,}1\cdot 10000\cdot 10^{-5}}$ **b)** $\dfrac{\left(0{,}0001^{2}\right)^{-2}\cdot 10^{6}}{\left(1000^{-1}\right)^{-5}\cdot 10^{-3}}$

a) $\dfrac{\left(0{,}0001^{-2}\right)^{3}\cdot 100^{2}}{0{,}1\cdot 10000\cdot 10^{-5}}=\dfrac{\left(10^{-4}\right)^{-6}\cdot 10^{4}}{10^{-1}\cdot 10^{4}\cdot 10^{-5}}=10^{30}$

b) $\dfrac{\left(10^{-4}\right)^{-4}\cdot 10^{6}}{\left(10^{3}\right)^{5}\cdot 10^{-3}}=10^{10}$

**1.24. Copia en tu cuaderno y completa:**

| Escritura decimal | Escritura $n\cdot 10^{p}$ | Notación científica |
|---|---|---|
| **25 000 000** | $25\cdot 10^{6}$ | $2{,}5\cdot 10^{7}$ |
| **0,0000043** | $43\cdot 10^{-7}$ | $4{,}3\cdot 10^{-6}$ |
| 0,029 | $\mathbf{29\cdot 10^{-3}}$ | $2{,}9\cdot 10^{-2}$ |
| 43 800 000 | $\mathbf{438\cdot 10^{5}}$ | $4{,}38\cdot 10^{7}$ |
| 0,000348 | $348\cdot 10^{-6}$ | $\mathbf{3{,}48\cdot 10^{-4}}$ |
| 130 000 | $13\cdot 10^{4}$ | $\mathbf{1{,}3\cdot 10^{5}}$ |

**1.25. Actividad interactiva.**

**1.26. Actividad resuelta.**

**1.27. Calcula mentalmente:**

| | | |
|---|---|---|
| **a)** $\sqrt[55]{1}$ | **d)** $\sqrt[40]{-1}$ | **g)** $\sqrt[5]{32}$ |
| **b)** $\sqrt[4]{81}$ | **e)** $\sqrt[3]{-1000}$ | **h)** $\sqrt[4]{0{,}0001}$ |
| **c)** $-\sqrt[6]{64}$ | **f)** $-\sqrt{36}$ | **i)** $\sqrt[4]{-81}$ |

| | | |
|---|---|---|
| a) 1 | d) No existe. | g) 2 |
| b) 3 | e) –10 | h) 0,1 |
| c) –2 | f) –6 | i) No existe. |

**1.28. Reduce a índice común y ordena de mayor a menor los siguientes radicales.**

**a)** $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[8]{8}$, $\sqrt[6]{6}$ **b)** $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[10]{20}$

a) $\sqrt[4]{4}=\sqrt[24]{4^6}=\sqrt[24]{2^{12}}=\sqrt[24]{2^4\cdot 4^4}$ $\quad\sqrt[8]{8}=\sqrt[24]{8^3}=\sqrt[24]{2^9}$ $\quad\sqrt[6]{6}=\sqrt[24]{6^4}=\sqrt[24]{2^4\cdot 3^4}$

Luego $\sqrt[8]{8}<\sqrt[6]{6}<\sqrt[4]{4}$

b) $\sqrt[5]{5}=\sqrt[10]{25}$ $\quad\sqrt{2}=\sqrt[10]{32}$ $\quad\sqrt[10]{20}$

Luego $\sqrt[10]{20}<\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}$

**1.29. ¿Cuál es el error en esta falsa igualdad?**

$$\sqrt{-1}=\sqrt[2\cdot 4]{(-1)^4}=\sqrt[8]{1}=1$$

Aplica la propiedad fundamental mal, pues esta solo es válida si el radicando es mayor o igual que cero, y en este caso no lo es.

**1.30. Actividad resuelta.**

**1.31. Expresa los siguientes radicales como potencias y simplifícalos.**

| | | |
|---|---|---|
| **a)** $\sqrt[3]{729}$ | **c)** $\sqrt{125}$ | **e)** $\sqrt[10]{81}$ |
| **b)** $\sqrt[4]{1024}$ | **d)** $\sqrt[6]{8}$ | **f)** $\sqrt[12]{15\,625}$ |

a) $\sqrt[3]{729}=\left(3^6\right)^{\frac{1}{3}}=3^2=9$ $\quad$ c) $\sqrt{125}=\left(5^3\right)^{\frac{1}{2}}=5\sqrt{5}$ $\quad$ e) $\sqrt[10]{81}=\left(3^4\right)^{\frac{1}{10}}=3^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{9}$

b) $\sqrt[4]{1024}=\left(2^{10}\right)^{\frac{1}{4}}=4\sqrt{2}$ $\quad$ d) $\sqrt[6]{8}=\left(2^3\right)^{\frac{1}{6}}=\sqrt{2}$ $\quad$ f) $\sqrt[12]{15\,625}=\left(5^6\right)^{\frac{1}{12}}=\sqrt{5}$

**1.32. Tres de los siguientes cinco números son iguales. ¿Cuáles?**

$\boldsymbol{A} = \sqrt{5} + \sqrt{5}$ $\quad$ $\boldsymbol{C} = 2\sqrt{5}\sqrt{5}$ $\quad$ $\boldsymbol{E} = \sqrt{5}\sqrt{5}$

$\boldsymbol{B} = \dfrac{\sqrt{500}}{5}$ $\quad$ $\boldsymbol{D} = \sqrt{20}$

$A = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ $\quad$ $C = 2\sqrt{5}\sqrt{5} = 2 \cdot 5 = 10$ $\quad$ $E = \sqrt{5}\sqrt{5} = 5$

$B = \dfrac{\sqrt{500}}{5} = \dfrac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$ $\quad$ $D = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

*A*, *B* y *D* son iguales, pues valen $2\sqrt{5}$.

**1.33. *A*, *B* y *C* son los vértices de un triángulo tales que $AB = 2\sqrt{5}$, $BC = 3\sqrt{5}$ y $AC = \sqrt{65}$. ¿Qué tipo de triángulo es?**

Como $AB^2 = 20$, $BC^2 = 45$ y $AC^2 = 65$, se verifica el teorema de Pitágoras y, por tanto, el triángulo es rectángulo.

**1.34. Calcula el valor de *x* sabiendo que $\sqrt{18} \cdot x = \sqrt{50} \cdot x + 7\sqrt{2}$.**

$$\sqrt{18} \cdot x = \sqrt{50} \cdot x + 7\sqrt{2} \Rightarrow 3\sqrt{2} \cdot x = 5\sqrt{2} \cdot x + 7\sqrt{2} \Rightarrow 3 \cdot x = 5 \cdot x + 7 \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$$

**1.35. ¿Qué figura tiene más área: un rectángulo de lados $\sqrt{2}$ y $\sqrt{72} + 3\sqrt{6}$ o un cuadrado de lado $3 + \sqrt{3}$?**

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{72} + 3\sqrt{6}\right) = \sqrt{2}\left(\sqrt{2^3 \cdot 3^2} + 3\sqrt{2 \cdot 3}\right) = \sqrt{2}\left(2 \cdot 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2 \cdot 3}\right) = 12 + 6\sqrt{3}$$

$$\left(3 + \sqrt{3}\right)^2 = 9 + 2 \cdot 3\sqrt{3} + 3 = 12 + 6\sqrt{3}$$

Tienen la misma área.

**1.36. Escribe las siguientes expresiones utilizando:**

**a) Radicales:** $x^{\frac{2}{3}}$, $\left(8x^{\frac{1}{3}}\right)^2$, $3 + a^{\frac{1}{3}}$, $(3 + a)^{\frac{1}{3}}$

**b) Exponentes fraccionarios:** $\sqrt[3]{2a^2}$, $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt[3]{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

a) $\sqrt[3]{x^2}$, $64\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{8^6 x^2}$, $3 + \sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{3 + a}$

b) $\left(2a^2\right)^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{1}{6}}$, $\left(a^2 + b^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

**1.37. Demuestra la propiedad fundamental de los radicales utilizando exponentes fraccionarios.**

Como $\dfrac{1}{n} = \dfrac{m}{n \cdot m}$, si $a \geq 0$, $a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n \cdot m}}$. La condición $a \geq 0$ es necesaria para garantizar que existe $a^{\frac{1}{n}}$.

**1.38. Actividad resuelta.**

**1.39. (TIC) Opera y simplifica.**

**a)** $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4}$ **c)** $\sqrt[4]{3}:\sqrt[3]{2}$ **e)** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4}}}$

**b)** $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{8}$ **d)** $\left(\sqrt[6]{5^2}\right)^3$ **f)** $\left(\sqrt{3}-\sqrt{12}\right)^2$

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\cdot 3\cdot 2^2}=2\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{4^2\cdot 2^3\cdot 8}=\sqrt[6]{2^4\cdot 2^3\cdot 2^3}=\sqrt[6]{2^6\cdot 2^4}=2\,\sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{3}:\sqrt[3]{2}\ =\sqrt[12]{3^3:2^4}$

d) $\left(\sqrt[6]{5^2}\right)^3=\sqrt[6]{5^{2\cdot 3}}=5$

e) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4}}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[4\cdot 3]{2}=\sqrt[12]{2}$

f) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{12}\right)^2=3-2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}+12=15-12=3$

**1.40. (TIC) Opera y simplifica.**

**a)** $\sqrt{12}-4\sqrt{27}+3\sqrt{75}$

**b)** $3\sqrt{20}-2\sqrt{80}-\sqrt{45}$

**c)** $\frac{3}{2}\sqrt{32}+5\sqrt{18}-\sqrt{2^7}-\sqrt{3^2\cdot 2^5}-\sqrt{2}$

a) $\sqrt{12}-4\sqrt{27}+3\sqrt{75}=2\sqrt{3}-4\cdot 3\sqrt{3}+3\cdot 5\sqrt{3}=(2-12+15)\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{20}-2\sqrt{80}-\sqrt{45}=3\cdot 2\sqrt{5}-2\cdot 4\sqrt{5}-3\sqrt{5}=(6-8-3)\sqrt{5}=-5\sqrt{5}$

c) $\frac{3}{2}\sqrt{32}+5\sqrt{18}-\sqrt{2^7}-\sqrt{3^2\cdot 2^5}-\sqrt{2}=\frac{3}{2}\cdot 4\sqrt{2}+5\cdot 3\sqrt{2}-8\sqrt{2}-3\cdot 4\sqrt{2}-\sqrt{2}=$

$=(6+15-8-12-1)\sqrt{2}=0$

**1.41. Extrae factores y simplifica al máximo:**

**a)** $\sqrt{3000}$ **b)** $\sqrt[3]{600}$ **c)** $\sqrt[4]{810}$

a) $\sqrt{3000}=\sqrt{100\cdot 30}=10\sqrt{30}$

b) $\sqrt[3]{600}=\sqrt[3]{8\cdot 75}=2\,\sqrt[3]{75}$

c) $\sqrt[4]{810}=\sqrt[4]{2\cdot 3^4\cdot 5}=3\sqrt[4]{10}$

**1.42. (TIC) Sean $a=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{6}\right)$ y $b=3-\sqrt{6}$ .**

**a) Calcula $a^2$, $b^2$ y $a^2+b^2$.**

**b) Si $a$ y $b$ son los catetos de un triángulo rectángulo, halla la hipotenusa.**

a) $a^2=3\left(1+2\sqrt{6}+6\right)=21+6\sqrt{6}$

$b^2=9-6\sqrt{6}+6=15-6\sqrt{6}$

$a^2+b^2=36$

b) La hipotenusa mide 6.

**1.43. (TIC) Simplifica y expresa como un único radical.**

**a)** $\left(\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt{3^5}\right):\sqrt[4]{3^9\cdot 2^3}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^7}}}$

a) $\dfrac{2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{9}{4}}\cdot 2^{\frac{3}{4}}}=\dfrac{2^{\frac{8}{12}}\cdot 3^{\frac{30}{12}}}{3^{\frac{27}{12}}\cdot 2^{\frac{9}{12}}}=2^{\frac{-1}{12}}\cdot 3^{\frac{3}{12}}=\sqrt[12]{\dfrac{27}{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^7}}}=\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{7}{4\cdot 3}}}=\dfrac{x^{\frac{8}{12}}}{x^{\frac{7}{12}}}=\sqrt[12]{x}$

**1.44. Actividad interactiva.**

**1.45. Actividad resuelta.**

**1.46. Racionaliza y simplifica las expresiones.**

**a)** $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$ **b)** $\dfrac{10}{\sqrt[3]{5}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{12}}$ **d)** $\dfrac{5}{\sqrt[4]{1000}}$

a) $\dfrac{3\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{5}}=\dfrac{10\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}}=\dfrac{10\cdot\sqrt[3]{25}}{5}=2\sqrt[3]{25}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{12}}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt[3]{12}\right)^2}{\sqrt[3]{12}\cdot\left(\sqrt[3]{12}\right)^2}=\dfrac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}}{12}=\dfrac{3^{\frac{3}{6}}\cdot 3^{\frac{4}{6}}\cdot 2^{\frac{8}{6}}}{12}=\dfrac{3^{\frac{7}{6}}\cdot 2^{\frac{8}{6}}}{12}=\dfrac{3\cdot 3^{\frac{1}{6}}\cdot 2\cdot 2^{\frac{2}{6}}}{12}=\dfrac{3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{2}{6}}}{2}=\dfrac{\sqrt[6]{12}}{2}$

d) $\dfrac{5\cdot\sqrt[4]{1000^3}}{\sqrt[4]{1000}\cdot\sqrt[4]{1000^3}}=\dfrac{\sqrt[4]{10003}}{200}=\dfrac{\sqrt[4]{10}}{2}$

**1.47. (TIC) Racionaliza y simplifica.**

**a)** $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ **b)** $\dfrac{2}{5-\sqrt{23}}$ **c)** $\dfrac{7}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

a) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{2}=2\sqrt{5}+2\sqrt{7}$

b) $\dfrac{2}{5-\sqrt{23}}=\dfrac{2\left(5+\sqrt{23}\right)}{25-23}=5+\sqrt{23}$

c) $\dfrac{7}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}=\dfrac{7\sqrt{3+\sqrt{2}}}{3+\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{3+\sqrt{2}}\left(3-\sqrt{2}\right)}{7}=\sqrt{3+\sqrt{2}}\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)$

**1.48. (TIC) Racionaliza y simplifica.**

**a)** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$

a) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{6+2\cdot 3\sqrt{2}+3}{3}=3+2\sqrt{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}=\dfrac{\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)^2}{2y}=\dfrac{2x+2\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}}{2y}=\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$

**1.49. (TIC) Calcula.**

**a)** $\dfrac{6}{\sqrt[3]{72}}-\dfrac{10}{\sqrt[3]{375}}$ **b)** $\dfrac{5}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{3}{1+\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{72}}-\dfrac{10}{\sqrt[3]{375}}=\dfrac{6\sqrt[3]{3\cdot 5^3}-10\sqrt[3]{2^3\cdot 3^2}}{30}=\dfrac{30\sqrt[3]{3}-20\sqrt[3]{3^2}}{30}=\dfrac{3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{9}}{3}$

b) $\dfrac{5}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{3}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{8-2\sqrt{2}}{-1}=-8+2\sqrt{2}$

**1.50. Actividad resuelta.**

**1.51. Calcula los logaritmos en base 2 de –4, 2, $\frac{1}{8}$, 1024, $\sqrt[3]{32}$ , y 8 · 16 · 2$^5$.**

$\log_2(-4)$: no existe

$\log_2 2 = 1$

$\log_2\dfrac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3$

$\log_2 1024=\log_2 2^{10}=10$

$\log_2\sqrt[3]{32}=\log_2 2^{\frac{5}{3}}=\dfrac{5}{3}$

$\log_2 8\cdot 16\cdot 2^5=\log_2 2^3\cdot 2^4\cdot 2^5=\log_2 2^{12}=12$

**1.52. Sin calculadora, halla la primera cifra de log 450, log 37, log 0,03, log$_3$ 10, log$_5$ 75 y $\log_2\frac{1}{3}$.**

Como log 100 = 2 y log 1000 = 3, la primera cifra de log 450 es 2.

Como log 10 = 1 y log 100 = 2, la primera cifra de log 37 es 1.

Como log 0,1 = $\log\dfrac{1}{10}=-1$, la primera cifra de log 0,03 es –1.

Como $\log_3 3^2 = 2$, la primera cifra de $\log_3 10$ es 2.

Como $\log_5 25 = 2$ y $\log_5 125 = 3$, la primera cifra de $\log_5 75$ es 2.

Como $\log_2\dfrac{1}{2}=-1$ y $\log_2\dfrac{1}{4}=-2$, la primera cifra de $\log_2\dfrac{1}{3}$ es –1.

**1.53. Calcula el valor de *x* en estas igualdades.**

**a)** $\log 1\,000\,000 = x$

**b)** $\log_x 0{,}5=-1$

**c)** $\log(-100)=x$

**d)** $\log_2 x = 5$

**e)** $\log_7\dfrac{1}{49}=x$

**f)** $\log x=-3$

a) $\log 1\,000\,000 = x \Rightarrow \log 10^6 = x = 6$

b) $\log_x 0{,}5=-1\Rightarrow \log_x\dfrac{1}{2}=-1\Rightarrow x=2$

c) $\log(-100)=x\Rightarrow$ No existe.

d) $\log_2 x=5\Rightarrow x=2^5=32$

e) $\log_7\dfrac{1}{49}=x\Rightarrow \log_7 7^{-2}=x=-2$

f) $\log x=-3\Rightarrow x=10^{-3}=0{,}001$

**1.54. Actividad resuelta.**

**1.55. Actividad resuelta.**

**1.56. Tomando log 8 = 0,903, calcula:**

**a) log 80** **c) log 2** **e) log 64**

**b) log 0,8** **d) log 1,25** **f) log $\sqrt[3]{800}$**

a) log (8 · 10) = log 8 + log 10 = 1,903

b) log $\frac{8}{10}$ = log 8 – log 10 = –0,097

c) log $\sqrt[3]{8}$ = log $8^{\frac{1}{3}}$ = 0,301

d) log $\frac{10}{8}$ = log 10 – log 8 = 0,097

e) log $8^2$ = 1,806

f) $\log\left(\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{100}\right)$ = log $8^{\frac{1}{3}}$ + log $10^{\frac{2}{3}}$ = $\frac{1}{3}\cdot 0{,}903+\frac{2}{3}$ = 0,968

**1.57. Calcula el valor de *A* sin usar la calculadora.**

$$\log A = \log 8 - 2\log 3 + \log 16$$

log *A* = log $\frac{8\cdot 16}{9}$, luego *A* = $\frac{128}{9}$

**1.58. Toma logaritmos en la expresión $x = \dfrac{a^3\sqrt{b}}{100\sqrt[3]{c}}$.**

log *x* = 3 log *a* + $\frac{1}{2}$log *b* – log 100 – $\frac{1}{3}$log *c* = 3 log *a* + $\frac{1}{2}$log *b* – 2 – $\frac{1}{3}$log *c*

**1.59. (TIC) Halla *x* con ayuda de la calculadora si $3^x = 7$.**

$x = \dfrac{\log 7}{\log 3} \cong 1{,}77$

**1.60. ¿A qué número hay que elevar 5 para que dé un millón?**

$x = \log_5 1000\,000 = \dfrac{\log 1000000}{\log 5} = 8{,}584$

**1.61. Calcula $2^{\log_2 7}$ y $\log_{19}\sqrt{19}$.**

$x = 2^{\log_2 7} \Rightarrow \log_2 x = \log_2 2^{\log_2 7} \Rightarrow \log_2 x = \log_2 7 \cdot \log_2 2 \Rightarrow x = 7$

$\log_{19}\sqrt{19} = \log_{19} 19^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{19} 19 = \frac{1}{2}$

**1.62. Demuestra las fórmulas de logaritmo de un cociente y logaritmo de una potencia.**

Cociente:

$$\left.\begin{array}{l}\log_b M = x \Rightarrow b^x = M \\ \log_b N = y \Rightarrow b^y = N\end{array}\right\} \text{ entonces } \frac{M}{N} = \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

Y volviendo a usar la definición: $\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b b^{x-y} = x - y = \log_b M - \log_b N$

Potencia:

$\log_b M = x \Rightarrow b^x = M \Rightarrow$ entonces $M^r = \left(b^x\right)^r = b^{r\cdot x}$

Y volviendo a usar la definición: $\log_b\left(M^r\right) = r \cdot x = r \cdot \log_b M$

**1.63. Transforma los siguientes logaritmos en sumas y restas de log *A* y log *B*.**

**a)** $\log\frac{\sqrt{B}}{10A}$ **b)** $\log\frac{B^3}{\sqrt{A}} - \log A^2$

a) $\log\frac{\sqrt{B}}{10A} = \frac{1}{2}\log B$ □$1 - \log A$

b) $\log\frac{B^3}{\sqrt{A}} - \log A^2 = 3\log B$ □ $\frac{1}{2}\log A - 2\log A = 3\log B$ □ $\frac{5}{2}\log A$

**1.64. Despeja *x* en estas dos expresiones.**

**a)** $A = B(1+C)^x$ **b)** $\log A^x = \log\sqrt{B}$

a) $x = \frac{\log A - \log B}{\log(1+C)}$ b) $x = \frac{\log\sqrt{B}}{\log A}$

**1.65. Si $\log_2 A = C$, calcula $\log_8 A$, $2^{\log_2 A}$ y $\log_2\frac{1}{A}$.**

$\log_8 A = \frac{\log_2 A}{\log_2 8} = \frac{C}{3}$ $2^{\log_2 A} = A$ $\log_2\frac{1}{A} =$ □$C$

**1.66. Expresa $\log\frac{a}{b} + \log\frac{b}{c} + \log\frac{c}{d} - \log\frac{ay}{dx}$ como un solo logaritmo.**

$$\log\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}}{\frac{ay}{dx}} = \log\frac{x}{y}$$

**1.67. Actividad interactiva.**

**1.68. Actividad resuelta.**

**1.69. ¿Qué capital debe imponerse a un interés compuesto del 5 % para convertirse al cabo de un año en un capital de 10 000 euros?**

10 000 = $C$(1 + 0,05) $\Rightarrow$ $C$ = 9524 euros

**1.70. Un banco ofrece un interés compuesto del 6 % anual en su cuenta de ahorro vivienda con la condición de que cada año ingreses 1000 euros en ella.**

**Si aceptas la oferta y retiras tu dinero a los 5 años, ¿cuánto dinero deberá entregarte el banco?**

1.$^{er}$ año: 1000 · 1,06 = 1060 euros

2.º año: 2060 · 1,06 = 2183,6 euros

3.$^{er}$ año: 3183,6 · 1,06 = 3374,616 euros

4.º año: 4374,616 · 1,06 = 4637,09296 euros

5.º año: 5637,09296 · 1,06 = 5975,32 euros

**1.71. ¿A qué tanto por ciento debe imponerse un capital para duplicarlo en 15 años?**

$2C = C(1 + r)^{15} \Rightarrow r = \sqrt[15]{2} - 1 = 0{,}047 \Rightarrow$ Al 4,7 %

**1.72. (TIC) ¿Cuántos años debe estar impuesto un capital para que al 5 % se convierta en 1,25 veces el capital impuesto inicialmente?**

$1{,}25C = C(1 + 0{,}05)^t \Rightarrow t = \dfrac{\log 1{,}25}{\log 1{,}05} = 4{,}57$. Cuatro años y medio, aproximadamente.

**1.73. (TIC) La población de un país aumenta por término medio un 8 % anual. Si actualmente hay 20 millones de habitantes en dicho país, ¿qué población estimas que tendrá dentro de 30 años?**

Población en 30 años (en millones) = $20 \cdot (1{,}08)^{30} = 201{,}25$. Habrá 201,25 millones de habitantes.

# EJERCICIOS

## Números reales

**1.74. Indica qué tipo de expresión decimal tienen los siguientes números.**

**a)** $\dfrac{7}{20}$ **b)** $\dfrac{8}{11}$ **c)** $\dfrac{11}{18}$ **d)** $\dfrac{13}{35}$

a) $\dfrac{7}{20} = 0{,}35$. Decimal exacto

b) $\dfrac{8}{11} = 0{,}\widehat{72}$. Decimal periódico puro

c) $\dfrac{11}{18} = 0{,}6\widehat{1}$. Decimal periódico mixto

d) $\dfrac{13}{35} = 0{,}3\widehat{714285}$. Decimal periódico mixto

**1.75. Indica todos los conjuntos numéricos a los que puedan pertenecer estos números.**

$$\frac{3}{5};\ -\sqrt{2};\ 1{,}2525...;\ 2{,}010010001...;\ -4;\ 0{,}2\widehat{6}$$

Enteros (**Z**): –4

Racionales (**Q**): –4; $\dfrac{3}{5}$; 1,2525…; $0{,}1\widehat{6}$

Reales (**R**): Todos

**1.76. Señala si los siguientes números son racionales o irracionales.**

**a) 5,372 727 272…**

**b) 0,127 202 002 000…**

**c) 3,545 445 444 5…**

**d) 8,666 126 712 67…**

a) Racional

b) Irracional

c) Irracional

d) Racional

**1.77. Di si estas frases son verdaderas o falsas.**

**a) La raíz de un número negativo no es real.**

**b) Todo número decimal es racional.**

**c) Una fracción irreducible de denominador 63 es periódica mixta.**

**d) El número $\sqrt{\frac{12}{3}}$ pertenece a N, Z, Q y R.**

**e) –1 pertenece al intervalo $\left(-\sqrt{25}, -\sqrt[3]{8}\right)$.**

**f) $\frac{a}{b} = 3,414114111411114...$**

a) Verdadera

b) Verdadera

c) Falsa

d) Verdadera

e) Falsa

f) Falsa

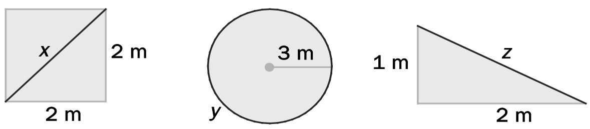
**1.78. En la siguiente cadena de contenidos:**

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

**Encuentra un número que pertenezca a cada conjunto, pero no a los anteriores.**

$1 \in \mathbf{N}$ $\quad -1 \in \mathbf{Z}$ $\quad \frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$ $\quad \sqrt{2} \in \mathbf{R}$

**1.79. Las longitudes *x*, *y*, *z*, ¿pueden ponerse como cociente de dos enteros? ¿Por qué?**




No, ya que $x = \sqrt{8}$, $y = 6\pi$ y $z = \sqrt{5}$ son números irracionales.

## Aproximaciones

**1.80. ¿Qué errores absoluto y relativo se cometen cuando se aproxima 4,1592 por 4,16?**

Error absoluto = $|4,1592 - 4,16| = 0,0008$

Error relativo = $\frac{0,0008}{4,16} = 0,0002$

**1.81. ¿Cuántos números reales hay comprendidos entre 5,187246 y 5,187247? Escribe tres.**

Existen infinitos números reales entre ambos, por ejemplo: 5,187 2461; 5,187 2462; 5,187 2463.

**1.82. Copia y completa los recuadros vacíos con < o > según sea necesario en cada caso.**

**a)** $\frac{1}{6} \square$ **0,166 667**

**b)** **1,732 051** $\square \sqrt{3}$

**c)** **1,333 334** $\square \frac{4}{3}$

**d)** $\sqrt[3]{5} \square$ **1,709 976**

a) $\frac{1}{6} < 0{,}166667$

b) $1{,}732051 > \sqrt{3}$

c) $1{,}333334 > \frac{4}{3}$

d) $\sqrt[3]{5} < 1{,}709976$

**1.83. El salón de mi casa mide 4,86 metros de largo. Redondea este valor a metros y a decímetros.**

4,86 m $\rightarrow$ Redondeo a metros = 5 m

4,86 m $\rightarrow$ Redondeo a decímetros = 49 dm

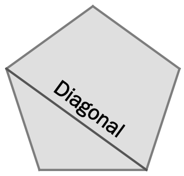
**1.84. Calcula los intervalos que aproximan al número $\sqrt{2}+1$ con un error menor que una décima, una centésima y una milésima.**

Error menor que una décima: $(2{,}4;\ 2{,}5)$

Error menor que una centésima: $(2{,}41;\ 2{,}42)$

Error menor que una milésima: $(2{,}414;\ 2{,}415)$

**1.85. La relación entre la diagonal de un pentágono regular y su lado se llama número de oro o áureo, y se designa por φ.**




$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618...$$

**a) ¿Es racional? ¿Por qué?**

**b) Calcula una aproximación por defecto con un error menor que una centésima.**

a) Es irracional, ya que al ser $\sqrt{5}$ irracional, entonces $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ también lo es.

b) $\varphi = 1{,}61$

**1.86. (TIC) La sucesión $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ se va acercando cada vez más al número $e$ = 2,71828…**

**¿Con qué término de la sucesión consigues aproximar hasta la milésima dicho número? $\left(n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1\right)$.**

Con el elemento $a_6 = 2{,}718055...$

## La recta real

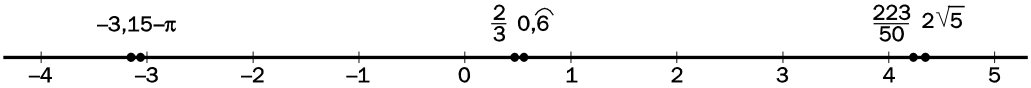
**1.87. Ordena de menor a mayor y representa gráficamente los siguientes números reales.**

$$-\pi;\quad 2\sqrt{5};\quad \frac{2}{3};\quad \frac{223}{50};\quad -3{,}15;\quad 0{,}\widehat{6}$$

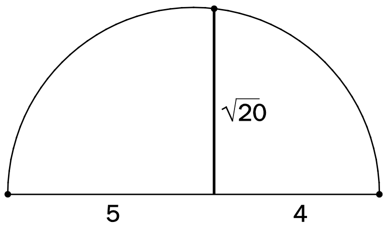
Necesitamos tener la aproximación decimal de cada uno de los números:

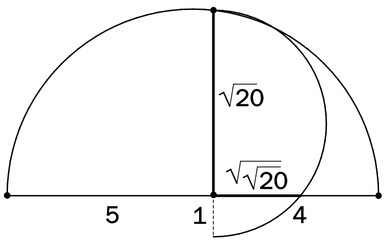
$$-\pi = -3{,}14159\ldots \quad 2\sqrt{5} = 4{,}4721\ldots \quad \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots \quad \frac{223}{50} = 4{,}46 \quad \Rightarrow \quad -3{,}15 < -\pi < \frac{2}{3} = 0{,}\widehat{6} < \frac{223}{50} < 2\sqrt{5}$$

Utilizando la aproximación decimal anterior, representamos gráficamente los números:




**1.88. (TIC) Representa en la recta real $\sqrt{20}$ y $\sqrt{\sqrt{20}}$ .**




## Valor absoluto. Intervalos y semirrectas

**1.89. Realiza las siguientes operaciones.**

**a)** $|-7 + 2|$

**b)** $^3|-5| - |-8|^3$

**c)** $||-9^3+|2|\,|-5||$

**d)** $|-9||5 - 3| - |-4| : |-2|$

a) $|-7 + 2| = 5$

b) $^3|-5| - |-8|^3 = 3$

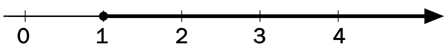
c) $||-9^3 + |2||-5|| = 19$

d) $|-9||5 - 3| - |-4| : |-2| = 16$

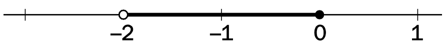
**1.90. Expresa con desigualdades y gráficamente los siguientes intervalos y semirrectas.**

**a)** $[-1, +\infty)$ **b)** $(-2, 0]$ **c)** $(-\infty, 3)$ **d)** $[4, 8]$

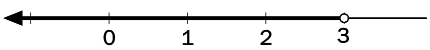
a) $[-1, +\infty) \rightarrow x \geq -1 \rightarrow$




b) $(-2, 0] \rightarrow -2 < x \leq 0 \rightarrow$



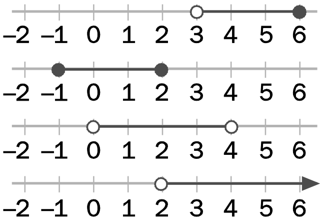

c) $(-\infty, 3) \rightarrow x < 3 \rightarrow$

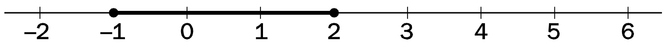


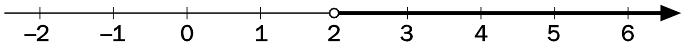

d) $[4, 8] \rightarrow 4 \leq x \leq 8 \rightarrow$

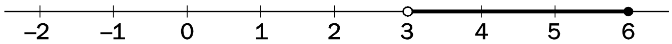
**1.91. Relaciona en tu cuaderno las diferentes expresiones de estos intervalos y semirrectas.**

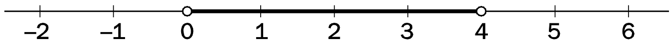
| | |
|---|---|
| $[-1, 2]$ | $x > 2$ |
| $(2, +\infty)$ | $0 < x < 4$ |
| $(3, 6]$ | $-1 \le x \le 2$ |
| $(0, 4)$ | $3 < x \le 6$ |




$[-1, 2] \rightarrow -1 \le x \le 2 \rightarrow$ 


$(2, +\infty) \rightarrow x > 2 \rightarrow$ 


$(3, 6] \rightarrow 3 < x \le 6 \rightarrow$ 


$(0, 4) \rightarrow 0 < x < 4 \rightarrow$ 


**1.92. Señala si las siguientes igualdades son verdaderas o no.**

**a)** $E[1, 2] = [-1, 3]$

**b)** $E(0, 1) = [-1, 1]$

**c)** $E(-2, 3) = (-5, 0)$

**d)** $E(4, 2) = (3, 5]$

a) Verdadera

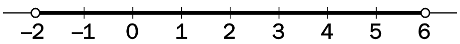
b) Falsa

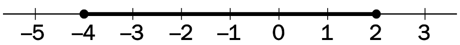
c) Falsa

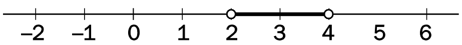
d) Falsa

**1.93. Marca estos entornos en la recta e indica los intervalos que determinan su centro y su radio.**

**a)** $E(2, 4)$ **b)** $E[-1, 3]$ **c)** $E(3, 1)$

a) $E(2, 4)$: $-2 < x < 6$; Centro = 2 y Radio = 4 $\rightarrow$ 


b) $E[-1, 3]$: $-4 \le x \le 2$; Centro = –1 y Radio = 3 $\rightarrow$ 


c) $E(3, 1)$: $2 < x < 4$; Centro = 3 y Radio = 1 $\rightarrow$ 


**1.94. ¿Qué números enteros están a la vez en las semirrectas $(-\infty, -2]$ y $(-6, +\infty)$?**

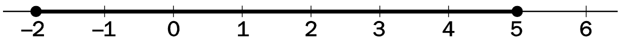
–5, –4, –3 y –2

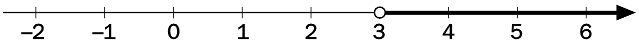
**1.95. ¿Qué intervalo equivale a $|x-3| \le 2$?**

El intervalo buscado es $[1, 5]$.

**1.96. Representa en la recta real el intervalo [–2, 5] y la semirrecta (3, +∞).**

**¿Existe algún intervalo de puntos común a ambos? En caso afirmativo, hállalo.**




Sí existe intervalo común a ambos: $(3, 5]$.

## Potencias de exponente entero. Notación científica

**1.97. Escribe los siguientes números como potencias cuya base sea un número primo.**

**a)** **8, 125, 243, 1024, 2401** **b)** $\frac{1}{625}, \frac{1}{343}, \frac{1}{256}, \frac{1}{81}, \frac{1}{32}$

a) $8 = 2^3$; $125 = 5^3$; $243 = 3^5$; $1024 = 2^{10}$; $2401 = 7^4$

b) $\frac{1}{625} = 5^{-4}$; $\frac{1}{343} = 7^{-3}$; $\frac{1}{256} = 2^{-8}$; $\frac{1}{81} = 3^{-4}$; $\frac{1}{32} = 2^{-5}$

**1.98. Escribe en notación científica los siguientes números.**

**a)** **5 182 000 000 000** **c)** **835 000 000 000 000**

**b)** **0,000 000 000 369** **d)** **0,000 000 000 003 51**

**¿Cuál tiene un orden de magnitud superior?**

a) $5{,}182 \cdot 10^{12}$ b) $3{,}69 \cdot 10^{-10}$ c) $8{,}35 \cdot 10^{14}$ d) $3{,}51 \cdot 10^{-12}$

Tiene mayor orden de magnitud el c.

**1.99. (TIC) Haz estas operaciones con potencias.**

**a)** $4^{-3} \cdot 4^2 : (4)^{-1}$ **b)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2$ **c)** $5^{-3}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^2$

a) $4^{-3} \cdot 4^2 : (4)^{-1} = 1$ b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2 = 3$ c) $5^{-3}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^2 = 5$

## Radicales

**1.100. Calcula el valor de *k* en cada caso.**

**a)** $\sqrt[3]{k} = \frac{1}{2}$ **b)** $\sqrt[5]{k} = -2$ **c)** $\sqrt[k]{-343} = -7$

a) $k = \frac{1}{8}$ b) $k = -32$ c) $k = 3$

**1.101. Ordena de mayor a menor estos números.**

**a)** $3,\ \sqrt{10},\ \sqrt[3]{26}$ **b)** $\sqrt{2},\ \sqrt[4]{5},\ \sqrt[5]{12}$

a) $\sqrt{10} > 3 > \sqrt[3]{26}$ b) $\sqrt[5]{12} > \sqrt[4]{5} > \sqrt{2}$

**1.102. Calcula el valor de las siguientes potencias.**

**a)** $25^{\frac{3}{2}}$ **b)** $343^{\frac{2}{3}}$ **c)** $16^{0,25}$ **d)** $27^{0,\widehat{3}}$

a) $25^{\frac{3}{2}} = 125$ b) $343^{\frac{2}{3}} = 49$ c) $16^{0,25} = 2$ d) $27^{0,3333...} = 3$

**1.103. (TIC) Efectúa las siguientes operaciones.**

**a)** $\sqrt{8} \cdot \sqrt{27}$ **d)** $\sqrt[4]{2187} : \sqrt{108}$ **g)** $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8}}}$

**b)** $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{392}$ **e)** $\sqrt{12} : \left(\sqrt[3]{32} : \sqrt[6]{2}\right)$ **h)** $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{2^6}}}$

**c)** $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{200}$ **f)** $\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{8}\right) : \sqrt[3]{4}$ **i)** $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2$

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{6^3} = \sqrt{216}$

b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{392} = \sqrt[15]{2^{19} \cdot 7^6}$

c) $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{200} = \sqrt[3]{2^6 : 5^2} = \sqrt[3]{\dfrac{2^6}{5^2}}$

d) $\sqrt[4]{2187} : \sqrt{108} = \sqrt[4]{\dfrac{3}{2^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}$

e) $\sqrt{12} : \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

f) $\sqrt{\dfrac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{2^{-5}}$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8}}} = \sqrt[4]{2}$

h) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{2^6}}} = \sqrt[24]{2^6} = \sqrt[4]{2}$

i) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2 = 4$

**1.104. (TIC) Opera y simplifica.**

**a)** $2\sqrt{20} + 3\sqrt{45} - \sqrt{80}$ **c)** $3\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} - 5\sqrt[3]{375}$

**b)** $4\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$ **d)** $\sqrt{27} - 2\sqrt{32} + \sqrt{180}$

a) $9\sqrt{5}$ c) $-14\sqrt[3]{3}$

b) $13\sqrt[3]{2}$ d) $3\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 6\sqrt{5}$

**1.105. Explica cómo expresiones tan distintas como $2^{0,5}$, $\sqrt{2}$ y $8^{\frac{1}{6}}$ son equivalentes.**

$8^{\frac{1}{6}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{0,5} = \sqrt{2}$

**1.106. (TIC) Realiza las siguientes operaciones.**

**a)** $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[6]{3}$

**b)** $\sqrt[3]{9}:\sqrt{12}$

**c)** $\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\right):\left(\sqrt[3]{3}\right)^2$

**d)** $3\sqrt{50}+2\sqrt{72}-4\sqrt{8}-\sqrt{200}$

a) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[6]{3}=\sqrt[12]{5^3\cdot 3^2}=\sqrt[12]{1125}$

b) $\sqrt[3]{9}:\sqrt{12}=\sqrt[6]{3\cdot 2^{-6}}=\dfrac{1}{2}\sqrt[6]{3}$

c) $3\sqrt{50}+2\sqrt{72}-4\sqrt{8}-\sqrt{200}=9\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}:(\sqrt[3]{3})^2=\sqrt[12]{3}$

**1.107. Calcula *a*, *b*, *c* y *d* en esta igualdad:**

$$\sqrt{10^4\cdot 14^6\cdot 81^{12}}=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d$$

$\sqrt{2^{10}\cdot 3^{48}\cdot 5^4\cdot 7^6}=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d\Rightarrow a=5;\ b=24;\ c=2;\ d=3$

**1.108. (TIC) Racionaliza las siguientes expresiones.**

**a)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}$ **b)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ **c)** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}$

b) $\dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$

c) $-3-2\sqrt{2}$

e) $-2-\sqrt{6}$

## Logaritmo de un número. Propiedades

**1.109. Calcula los siguientes logaritmos.**

**a)** $\log_2 32$

**b)** $\log_2 \dfrac{1}{16}$

**c)** $\log_2 \sqrt{8}$

**d)** $\log_{\frac{1}{2}} 32$

**e)** $\log_3 729$

**f)** $\log_3 \dfrac{1}{81}$

**g)** $\log_3 \sqrt[3]{243}$

**h)** $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27}$

**i)** $\log 1\,000\,000$

**j)** $\log \dfrac{1}{1000}$

**k)** $\log \sqrt[5]{100}$

**l)** $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{100\,000}$

a) $\log_2 32=5$

b) $\log_2 \dfrac{1}{16}=-4$

c) $\log_2 \sqrt{8}=\dfrac{3}{2}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 32=-5$

e) $\log_3 729=6$

f) $\log_3 \dfrac{1}{81}=-4$

g) $\log_3 \sqrt[3]{243}=\dfrac{5}{3}$

h) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27}=3$

i) $\log_{10} 1000000=6$

j) $\log_{10} \dfrac{1}{1000}=-3$

k) $\log_{10} \sqrt[5]{100}=\dfrac{2}{5}$

l) $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{100000}=\dfrac{-5}{3}$

**1.110. Encuentra el valor de *x*.**

**a)** $\log_x 125 = 3$ **c)** $\log_x \frac{1}{16} = -8$

**b)** $-3 = \log_x 2$ **d)** $-\frac{1}{3} = \log_{27} x$

a) $x = 5$ c) $x = \sqrt{2}$

b) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ d) $x = \frac{1}{3}$

**1.111. Copia y completa en tu cuaderno los huecos usando la definición de logaritmo.**

**a)** $\log_2 8 = \square$ **b)** $\log_3 \square = 4$ **c)** $\log_{\square} 125 = 3$

a) 3 b) 81 c) 5

**1.112. Halla el valor de *x* en cada caso.**

**a)** $\log_x 16 = -4$ **c)** $\log_{11} 1331 = x$

**b)** $\log_{\frac{1}{7}} x = -3$ **d)** $\log_x 25 = 4$

a) $x = \frac{1}{2}$ c) $x = 3$

b) $x = 343$ d) $x = \sqrt{5}$

**1.113. Si log 8 ≈ 0,9031, halla:**

**a)** log 800 **c)** log 0,64 **e)** log 5

**b)** log 2 **d)** log 40 **f)** $\log\sqrt[5]{8}$

a) $\log 800 = \log 8 + \log 100 = 0{,}9031 + 2 = 2{,}9031$

b) $\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 \Rightarrow \log 2 = \frac{1}{3}\log 8 = 0{,}301$

c) $\log 0{,}64 = \log\frac{64}{100} = \log 64 - \log 100 = 2\log 8 - 2 = -0{,}1938$

d) $\log 40 = \log(10 \cdot 4) = \log 10 + \log 4 = 1 + 2\log 2 = 1{,}602$

e) $\log 40 = \log(8 \cdot 5) = \log 8 + \log 5 \Rightarrow \log 5 = \log 40 - \log 8 = 0{,}6989$

f) $\log\sqrt[5]{8} = \frac{1}{5}\log 8 = 0{,}1806$

**1.114. (TIC) Aplicando un cambio de base y usando la calculadora, halla los siguientes logaritmos.**

**a)** $\log_2 14$ **b)** $\log_3 32$ **c)** $\log_{\frac{1}{2}} 12$ **d)** $\log_5 10$

a) $\log_2 14 = \frac{\log 14}{\log 2} = 3{,}8073$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 12 = \frac{\log 12}{\log\frac{1}{2}} = -3{,}5850$

b) $\log_3 32 = \frac{\log 32}{\log 3} = 3{,}1546$ d) $\log_5 10 = \frac{\log 10}{\log 5} = 1{,}4307$

**1.115. Utilizando las propiedades de los logaritmos y siendo log $x \approx 0{,}70$ y log $y \approx 1{,}18$, calcula:**

**a)** $\log(x^2 \cdot y)$ **b)** $\log\dfrac{x^3}{y^2}$ **c)** $\log\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}\right)$

a) $\log(x^2 \cdot y) = 2\log x + \log y \cong 2{,}58$

b) $\log\dfrac{x^3}{y^2} = 3\log x - 2\log y \cong -0{,}26$

c) $\log\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y^2} = \dfrac{1}{2}\log x + \dfrac{2}{3}\log y \cong 1{,}14$

**1.116. Toma logaritmos en estas expresiones.**

**a)** $A = \dfrac{x^2y^3z^5}{t^4}$ **b)** $B = \dfrac{\sqrt{x}yz^2}{10t^3}$ **c)** $C = \dfrac{1100x^3y}{t^2}$

a) $\log A = 2\log x + 3\log y + 5\log z - 4\log t$

b) $\log B = \dfrac{1}{2}\log x + \log y + 2\log z - 3\log t - 1$

c) $\log C = \log 11 + 2 + 3\log x + \log y - 2\log t$

**1.117. Escribe como un único logaritmo.**

**a)** $\log 16 - \log 3 + \log 12$ **b)** $\log 18 - \log 27 - \log 2$ **c)** $\log 25 + \log 4 - (\log 8 - \log 9)$

a) $\log 16 - \log 3 + \log 12 = \log\dfrac{16 \cdot 12}{3} = \log 64$

b) log18 – log27 □ log2 $= \log\dfrac{18}{27 \cdot 2} = \log\dfrac{1}{3}$

c) log25 + log4 □ (log8 – log9) $= \log\dfrac{25 \cdot 4 \cdot 9}{8} = \log\dfrac{225}{2}$

**1.118. Expresa el segundo miembro como un solo logaritmo y halla los valores de *A* y *B*.**

**a)** $\log A = 3\log x + 2\log y - 5\log z$ **b)** $\log B = \dfrac{3}{2}\log x + \log y - \dfrac{2}{3}\log z - 2$

a) $A = \dfrac{x^3y^2}{z^5}$ b) $B = \dfrac{\sqrt{x^3} \cdot y}{\sqrt[3]{z^2} \cdot 100}$

**1.119. Ordena los siguientes logaritmos aplicando su definición y sus propiedades.**

$$\log\sqrt[3]{10};\ \log_2\left(\frac{1}{4}\right)^{-1};\ \ln\sqrt{\frac{1}{e}};\ \log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{3}$$

$\log\sqrt[3]{10} = \dfrac{1}{3}$; $\log_2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1} = 2$; $\ln\sqrt{\dfrac{1}{e}} =$ □ $\dfrac{1}{2}$; $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{3} = \dfrac{1}{2}$

Así pues, $\ln\sqrt{\dfrac{1}{e}} < \log\sqrt[3]{10} < \log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{3} < \log_2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}$

## Interés compuesto

**1.120. Cuando nació Sofía, sus padres depositaron 20 000 euros a su nombre al 10 % de interés compuesto. ¿Cuánto dinero tendrá Sofía cuando cumpla la mayoría de edad?**

$20\,000 \cdot (1{,}1)^{18} = 111\,200$ euros recogerá.

**1.121. ¿A qué tanto por ciento anual hay que colocar 50 000 euros para que se conviertan en 182124 euros al cabo de 15 años?**

$182\,124 = 50\,000(1 + x)^{15} \Rightarrow x = \sqrt[15]{\dfrac{182124}{50000}} - 1 = 0{,}09$. Al 9 % anual

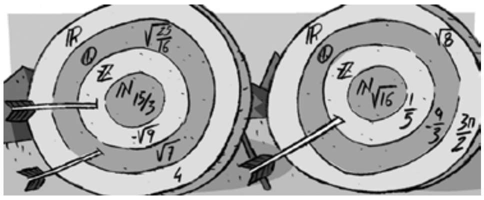
**1.122. ¿Cuánto tiempo hay que depositar un dinero al 4 % de interés compuesto para triplicarlo?**

$3 = (1{,}04)^x \Rightarrow x = \dfrac{\log 3}{\log 1{,}04} \cong 28{,}011$. Durante 28 años, aproximadamente.

## PROBLEMAS

**1.123. En un club matemático hay una diana de números reales. A cada dardo se le asigna un número y se ha de clavar en la franja de la diana correspondiente.**

**Si gana el jugador que más acierta en las franjas correctas, ¿cuál de los dos ha ganado?**



1.er jugador: 1 acierto $(-\sqrt{9} \in Z, \sqrt{7} \notin Q)$; 2.º jugador: 0 aciertos $(1/5 \notin \mathbf{Z}) \Rightarrow$ Gana el 1.er jugador.

**1.124. Para solar la entrada circular de 6 metros de radio de una sala de exposiciones se utilizan baldosas de 20 por 30 centímetros. ¿Cuántas baldosas se necesitan como mínimo? (Supón que se aprovechan todos los recortes.)**

$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = 36\pi \text{ m}^2 = 360\,000\pi \text{ cm}^2$

$A_{\text{baldosa}} = 30 \cdot 20 = 600 \text{ cm}^2$

$360000\pi : 600 \approx 1884{,}9 \Rightarrow$ El n.º mínimo de baldosas son 1885.

**1.125. La longitud de una circunferencia de radio 7 metros se aproxima a 43,988 metros. ¿Cuál es la aproximación de π que se ha utilizado?**

$43{,}988 = 2\pi r \Rightarrow \pi = \dfrac{43{,}988}{14} = 3{,}142$ Luego se ha tomado una aproximación por exceso a la milésima.

**1.126. El número π = 3,14159265… es el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Halla las aproximaciones por defecto, exceso y redondeo de π a la milésima, y los errores absoluto y relativo cometidos.**

Aproximación por defecto: $\pi \approx 3{,}141$

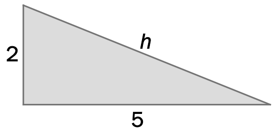
Aproximación por exceso: $\pi \approx 3{,}142$

Aproximación por redondeo: $\pi \approx 3{,}142$

Error absoluto $= |3{,}142 - \pi| = 0{,}000407...$

Error relativo $= \left|\dfrac{0{,}000407}{\pi}\right| = 0{,}000129...$

**1.127. ¿Qué aproximación está más cerca del valor de la hipotenusa del triángulo de la figura, 5,385 o 5,386 centímetros?**




**¿Cuánto más cerca?**

La aproximación 5,385 se encuentra más cerca del valor de la hipotenusa.

Está aproximadamente 7 diez milésimas más cerca que 5,386.

**1.128. (TIC) Un país invierte el 0,17 % del PIB en ayuda al desarrollo en vez del 0,7 % que recomienda la ONU para erradicar la pobreza.**

**Si el PIB del país es de 2 billones de euros al año, ¿cuánto dinero deja de destinar a ayuda al desarrollo según las indicaciones de la ONU? (Opera en notación científica.)**

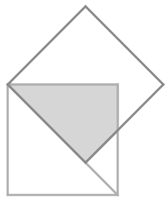
2 billones = $2 \cdot 10^{12}$€

Dinero invertido = $\frac{17}{10000} \cdot 2 \cdot 10^{12} = 34 \cdot 10^{8}€ = 3{,}4 \cdot 10^{9}€$

Dinero recomendado = $\frac{7}{1000} \cdot 2 \cdot 10^{12} = 14 \cdot 10^{9}€ = 1{,}4 \cdot 10^{10}€$

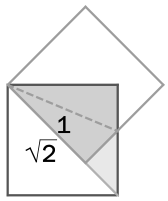
Dinero no destinado = $1{,}4 \cdot 10^{10} - 3{,}4 \cdot 10^{9} = 10{,}6 \cdot 10^{9}€ = 1{,}06 \cdot 10^{10}€$

**1.129. Dos cuadrados de lado 1 tienen un vértice común y el lado de uno de ellos está sobre la diagonal del otro, como se muestra en la figura.**



**¿Cuál es el área sombreada?**

Por la simetría del dibujo deducimos que el triangulito rojo es rectángulo isósceles. Así pues, el área de la zona sombreada es el área de medio cuadrado menos el área de un triángulo rectángulo isósceles de lado $\sqrt{2} - 1$.




Haciendo los cálculos obtenemos que Área = $\frac{1}{2} - \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2} = \sqrt{2} - 1$.

**1.130. (TIC) Redondeando $\pi$ a la milésima, el volumen de una esfera es de 14,139 centímetros cúbicos. Averigua su radio.**

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = 1{,}5$, con $\pi = 3{,}142$

**1.131. Marca en una recta numérica el conjunto de puntos cuya distancia al punto –2 sea:**

**a) Igual a 3.**

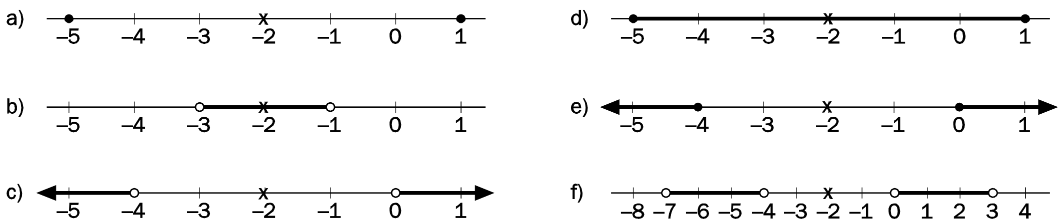
**b) Menor que 1.**

**c) Mayor que 2.**

**d) No mayor que 3.**

**e) No menor que 2.**

**f) Mayor que 2 y menor que 5.**



**1.132.** **Un profesor escribe en la pizarra la siguiente operación: $\sqrt[5]{8^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Y pide a la mitad de la clase que la desarrolle en forma de radicales, y a la otra mitad, que lo haga en forma de potencia. ¿Qué resultado obtendrá cada una de las partes de la clase?**

Desarrollando en forma de radicales se obtiene como resultado $\sqrt[30]{2}$.

Desarrollando en forma de potencia se obtiene como resultado $2^{\frac{1}{30}}$.

**1.133.** **Di si son ciertas o no estas afirmaciones.**

**a)** **Entre dos números reales siempre hay otro.**

**b)** **$\log_a x$ nunca es negativo.**

**c)** **$\log_a x$ existe si $x$ es negativo.**

**d)** **En (–4, –3) hay racionales, pero no enteros.**

**e)** **$|x| = -x$ para ciertos valores de $x$.**

a) Verdadera
b) Falsa
c) Falsa
d) Verdadera
e) Verdadera

**1.134.** **Una cafetería incrementa cada año el precio de un café en un 4 % (sea cual sea el IPC). Si actualmente cuesta 1,10 euros, ¿podrías encontrar la fórmula que relaciona el precio del café con los años transcurridos? ¿Cuánto costará el café dentro de 5 años?**

Sea $x$ el precio del café. Subir cada año un 4 % su precio se traduce en: $x + x \cdot \frac{4}{100} = x\left(1 + \frac{4}{100}\right) = x \cdot 1{,}04$

Así, la fórmula pedida será $1{,}1 \cdot 1{,}04^n$, donde $n$ = número de años transcurridos.

Aplicando dicha fórmula, dentro de 5 años el precio del café será de $1{,}1 \cdot 1{,}04^5 = 1{,}34€$.

**1.135.** **(TIC) Las ondas sísmicas producidas por un terremoto son de tipo P, longitudinales y de propagación rápida, y S, transversales y de menor velocidad. En la escala de Richter, la magnitud de un terremoto se calcula como:**

$$M = \log A + 3\log(8t) - 2{,}92$$

**donde $A$ es la amplitud en milímetros de las ondas S (medidas en el sismógrafo), y $t$, el tiempo transcurrido, en segundos, entre la aparición de las ondas P y las S.**

**a)** **Copia y completa la tabla, calculando las características para tres seísmos.**

**b)** **Calcula la relación entre las amplitudes de dos terremotos de magnitudes 6 y 9. (Supón el mismo valor para $t$.)**

| | **$t$ (s)** | **$A$ (mm)** | **$M$** |
|---|---|---|---|
| **1** | **8** | **15** | |
| **2** | **15** | | **4** |
| **3** | | **45** | **7** |

a)

| | $t$ (s) | $A$ (mm) | M |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 15 | 3,67 |
| 2 | 15 | 4,81 | 4 |
| 3 | 71,2 | 45 | 7 |

b) $\log A = 9 - 3\log(8t) + 2{,}92$

$\log A' = 6 - 3\log(8t) + 2{,}92$

Restando esas dos expresiones se obtiene:

$\log A - \log A' = 3 \Rightarrow \log\frac{A}{A'} = 3 \Rightarrow \frac{A}{A'} = 10^3$

**1.136. (TIC) El decibelio es la unidad que se usa para medir la sonoridad, $\beta = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ (volumen con que percibimos un sonido), donde *I* es la intensidad sonora, e $I_0 = 10^{-12}$ vatios por metro cuadrado (W/m²), la intensidad umbral que el oído humano puede percibir.**

**a) Calcula *β* para sonidos con intensidades de $10^{-6}$ y $10^{-9}$ W/m², respectivamente.**

**b) El umbral del dolor para el ser humano es de 120 decibelios. ¿Qué intensidad debe tener un sonido para llegar a este umbral?**

a) $I = 10^{-9} \Rightarrow S = 10\log\left(\frac{10^{-9}}{10^{-12}}\right) = 30$ decibelios

$I = 10^{-6} \Rightarrow S = 10\log\left(\frac{10^{-6}}{10^{-12}}\right) = 60$ decibelios

b) $120 = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Rightarrow 0 = \log I \Rightarrow I = 1\ \text{W/m}^2$

**1.137. Dos capitales, uno doble del otro, se colocan a interés compuesto: el menor al 10 % y el mayor al 6 %. ¿Al cabo de cuántos años se habrán igualado los capitales finales?**

La ecuación que resuelve el problema es $(1{,}1)^t = 2 \cdot (1{,}06)^t$.

$$\log(1{,}1)^t = \log 2 + \log(1{,}06)^t \Rightarrow t(\log 1{,}1 - \log 1{,}06) = \log 2 \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log\frac{1{,}1}{1{,}06}} \cong 18{,}71 \text{ años}$$

## AMPLIACIÓN

**1.138. Si $D = a^2 + b^2 + c^2$ con *a* y *b* enteros consecutivos y $c = a \cdot b$, $\sqrt{D}$ es:**

**a) Siempre un entero par.**

**b) Algunas veces un entero impar, otras no.**

**c) Siempre un entero impar.**

**d) Algunas veces un racional, otras no.**

Escribiendo $b = a + 1$, podemos poner $D = a^2 + (a + 1)^2 + a^2(a + 1)^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$. La estructura de esta última expresión, con cuadrados y dobles productos, invita a pensar que podría ser el cuadrado de $a^2 + a + 1$, como efectivamente es. Así pues, $D = (a^2 + a + 1)^2$, por lo que $\sqrt{D} = a^2 + a + 1$ (ya que $a^2 + a + 1 \geq 0$ sea cual fuere el entero a. Tenemos, entonces, que $\sqrt{D} = a(a + 1) + 1$, y como $a(a + 1)$ siempre es par, sigue que $\sqrt{D}$ es siempre un entero impar. Respuesta c.

**1.139. La suma de los valores de *x* que satisfacen la igualdad $|x + 2| = 2|x - 2|$ es:**

**a) $\frac{2}{3}$ b) 6 c) $\frac{19}{3}$ d) $\frac{20}{3}$**

Resolvamos la ecuación $|x + 2| = 2|x - 2|$.

Si $x < -2$, tenemos que $-x - 2 = 2(2 - x)$, es decir, $x = 6$, que no puede ser solución.

Si $-2 \leq x \leq 2$, es $x + 2 = 2(2 - x)$, por lo que $x = \frac{2}{3}$.

Finalmente, si $x > 2$, resulta $x + 2 = 2(x - 2)$, $x = 6$.

Las dos únicas soluciones que cumplen las condiciones son $\frac{2}{3}$ y 6, cuya suma es $\frac{20}{3}$. Respuesta d.

**1.140. Si $x$ verifica que $\frac{1}{x} < 2$ y $\frac{1}{x} > -3$, entonces:**

**a)** $x > \frac{1}{2}$ o $x < -\frac{1}{3}$

**b)** $-\frac{1}{2} < x < 3$

**c)** $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$

**d)** $x > \frac{1}{2}$

En principio, $x$ puede ser positivo o negativo.

- Si $x > 0$, las condiciones $\frac{1}{x} < 2$ y $\frac{1}{x} > -3$ son equivalentes a $1 < 2x$ y $1 > -3x$, respectivamente, es decir, $\frac{1}{2} < x$ y $x > -\frac{1}{3}$, que, al ser $x > 0$, se reducen a $\frac{1}{2} < x$.
- Si $x < 0$, las condiciones $\frac{1}{x} < 2$ y $\frac{1}{x} > -3$ son equivalentes a $1 > 2x$ y $1 < -3x$, es decir, $x < \frac{1}{2}$ y $x < -\frac{1}{3}$, que, al ser $x < 0$, se reducen a $x < -\frac{1}{3}$. Así pues, los números $x$ que verifican las desigualdades dadas son los que verifican $x > \frac{1}{2}$ y los que verifican $x < -\frac{1}{3}$.

Respuesta a.

**1.141. Si $\log_2 a + \log_2 b \geq 6$, el valor mínimo de $a + b$ es:**

**a)** $2\sqrt{2}$ **b)** $6$ **c)** $8\sqrt{2}$ **d)** $16$

Nos dicen que $\log_2 (ab) \geq 6$ siendo $a > 0$, $b > 0$, es decir, $ab \geq 64$. El valor mínimo de $a + b$ se dará cuando $ab = 64$, y si dos números tienen producto constante, su suma será mínima cuando sean iguales, es decir, $a + b = 16$. Respuesta d.

**1.142. $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ es igual a:**

**a)** $2$ **b)** $2\sqrt{3}$ **c)** $4\sqrt{2}$ **d)** $\sqrt{6}$

Llamando $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$, resulta $x^2 = 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{9-8}$, es decir, $x^2 = 4$, y como $x > 0$, es $x = 2$. Respuesta a.

**1.143. $A = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ y $B = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ verifican:**

**a)** $A^2 > 1$ **b)** $A = B$ **c)** $A < B$ **d)** $A > B$

Comparemos sus cuadrados: $A^2 = \frac{6+2+2\sqrt{12}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, $B^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$. Así pues, como $A^2 = B^2$ y ambos son positivos, es $A = B$. Respuesta b.

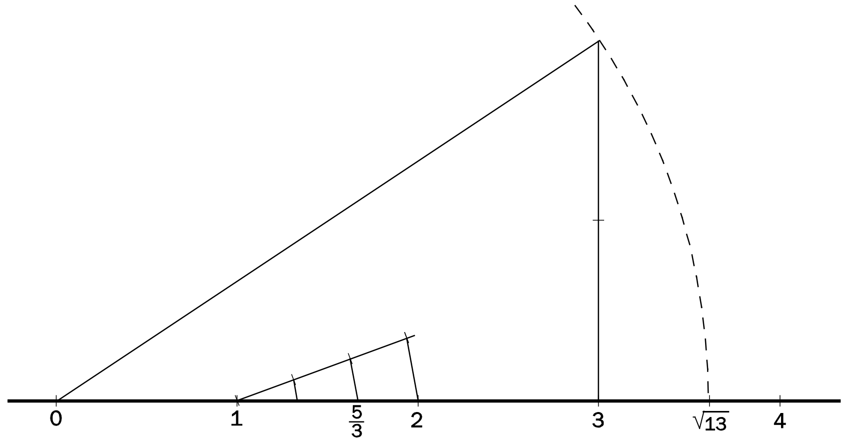
## AUTOEVALUACIÓN

**1.1.** **Sean los números $A$ = 1,7864… y $B$ = 2,3879…**

**Aproxima $A + B$ y $A - B$ a la milésima.**

$A + B = 4{,}174$ $\qquad$ $A - B = -0{,}602$

**1.2.** **Representa en la recta real $\frac{5}{3}$ y $\sqrt{13}$. ¿Son racionales o irracionales?**

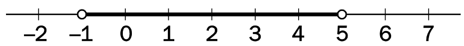



$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$ $\rightarrow$ Racional, y para representarlo se aplica el teorema de Tales.

$\sqrt{13}$ $\rightarrow$ Irracional, y para representarlo se aplica el teorema de Pitágoras.

**1.3.** **Un número real $x$ cumple $|x - 2| < 3$. Describe los posibles valores de $x$ gráficamente, con intervalos y mediante desigualdades.**

$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow x \in (-1, 5) \Leftrightarrow -1 < x < 5 \Leftrightarrow$




**1.4.** **Escribe en notación científica el resultado de: $(0{,}26 \cdot 10^{-4}) \cdot (8{,}53 \cdot 10^{9})^2 + 7{,}2 \cdot 10^{13}$.**

$1{,}9637834 \cdot 10^{15}$

**1.5.** **Haz las siguientes operaciones con radicales.**

**a)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{2}$ $\qquad$ **b)** $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{3}$ $\qquad$ **c)** $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^4$ $\qquad$ **d)** $3\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{27}$

a) $\sqrt[4]{18}$ $\qquad$ b) $\sqrt[15]{2^5 \cdot 3^{-3}}$ $\qquad$ c) $\sqrt[3]{4}$ $\qquad$ d) $20\sqrt{3}$

**1.6.** **Realiza las siguientes operaciones.**

**a)** $81^{1,25}$ $\qquad$ **b)** $8^{\frac{2}{3}}$ $\qquad$ **c)** $9^{1,5}$ $\qquad$ **d)** $125^{\frac{4}{3}}$

a) 243 $\qquad$ b) 4 $\qquad$ c) 27 $\qquad$ d) 625

**1.7.** **Racionaliza estas expresiones.**

**a)** $\frac{4}{\sqrt{8}}$ $\qquad$ **b)** $\frac{1}{\sqrt[3]{12}}$ $\qquad$ **c)** $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$

a) $\sqrt{2}$ $\qquad$ b) $\frac{\sqrt[3]{18}}{6}$ $\qquad$ c) $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{4}$

**1.8. Sabiendo que log 2 = 0,301…, calcula:**

**a) log 5** **b) log 20** **c) log 16** **d) $\log_5 2$**

a) $\log 5 = 0,699$ b) $\log 20 = 1,301$ c) $\log 16 = 1,204$ d) $\log_5 2 = 0,43$

**1.9. Toma logaritmos en la expresión $A = \dfrac{x^3 \sqrt[7]{y^2}\, z^{\frac{3}{4}}}{t^2}$.**

$$\log A = 3\log x + \frac{2}{7}\log y + \frac{3}{4}\log z - 2\log t$$

**1.10. Elimina los logaritmos en la expresión $\log A = \dfrac{1}{5}\log x + \dfrac{2}{9}\log y - 8\log z$.**

$$A = \frac{\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[9]{y^2}}{z^8}$$

## PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

### Calcula y descubre > El logaritmo del champú

**Las siglas pH significan "potencial de hidrógeno". Se trata de una escala que mide cómo de ácida o básica es una sustancia, y en el caso del jabón, el gel o el champú es importante porque, si son muy ácidos o muy básicos, pueden dañar la piel. Los ácidos fuertes, como el ácido sulfúrico, producen altas concentraciones de iones de hidrógeno, y las soluciones alcalinas fuertes, como la sosa cáustica, tienen concentraciones bajas.**

**La concentración se expresa como el número de moles por litro, pero como esto obliga a trabajar con números muy pequeños (por ejemplo, el vinagre tiene 0,001 moles/litro), en 1909 el químico danés Sorensen construyó una escala logarítmica para medirla: el pH. Lo definió como el opuesto del logaritmo de la concentración de moles de los iones de hidrógeno. Así, el pH del vinagre es –log 0,001 = –log($10^{-3}$) = 3.**

**Si el pH de una sustancia es 7, se dice que es neutra. Un pH inferior a 7 corresponde a una disolución ácida, y si es superior a 7, es básica. Por ejemplo, el pH del amoniaco es 12, y el del vino 4.**

**1.1. La concentración mínima de actividad molar de iones es de $10^{-14}$ moles/litro. ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar el pH?**

$-\log(10^{-14}) = 14$

**1.2. Considera el amoniaco, el vino y el vinagre.**

**a) ¿Cuáles de ellos son básicos y cuáles ácidos?**

**b) ¿Cuál es la concentración de moles por litro en cada uno de ellos?**

**c) ¿Cuántas veces es mayor la concentración de iones de hidrógeno en el amoniaco que en el vino?**

a) El amoniaco es básico. El vino y el vinagre son ácidos.

b) Del amoniaco, $10^{-12}$ moles/litro; del vino, $10^{-4}$, y del vinagre, $10^{-3}$.

c) $10^8$ veces

**1.3. ¿Cuántas veces es más ácida una sustancia cuyo pH es 2 que una cuyo pH es 4?**

Como la acidez de la que tiene pH = 2 es $10^{-2}$ y de la que tiene pH = 4 es $10^{-4}$, es 100 veces más ácida la de pH = 2.

**1.4. Para el cuerpo humano son corrosivas las sustancias con un pH menor que 3,5, y son cáusticas aquellas con un pH superior a 11,5, y todas ellas producen quemaduras químicas. Nombra tres sustancias ácidas corrosivas y tres sustancias básicas cáusticas.**

Ácidas corrosivas: ácido clorhídrico, ácido sulfúrico, ácido fluorhídrico

Básicas cáusticas: hidróxido de sodio (sosa cáustica), hipoclorito de sodio (lejía), óxido de calcio (cal viva)

**1.5. Si el pH neutro es 7, ¿por qué se anuncia un champú o un gel como “neutro” cuando su pH es 5,5?**

Porque son neutras para la piel, cuyo pH es 5,5, aproximadamente.

**1.6. Busca el pH de algunos productos de limpieza o cosmética que tengas en casa. ¿Cuáles son ácidos y cuáles básicos? ¿Cuáles de ellos son peligrosos?**

Respuesta abierta.

## Estima y comprende > ¿Como cuánto?

**1.1. El precio medio de la vivienda en España es de 2300 €/m$^2$ y el tamaño medio es de 98,6 m$^2$. ¿Cuál será el coste medio de una casa? Aproxímalo por una cifra redonda.**

$2300 \cdot 98,6 = 226\,780 \cong 200\,000$ euros.

**1.2. Ahora calcula el número de casas que podrías comprar con:**

**a) El presupuesto para construir un hospital: 50 000 000 €.**

**b) El coste del AVE Madrid-Valencia: 12 410 000 000 €.**

**c) El coste para Estados Unidos de la guerra de Irak: 540 000 000 000 €.**

a) Con el presupuesto de un hospital: 50 000 000 : 200 000 = 250 casas

b) Con el coste del AVE Madrid-Valencia: 12 410 000 000 : 200 000 = 62 050 casas

c) Con el coste de la guerra de Irak: 2 700 000 casas.

**1.3. ¿Cuál de las cifras anteriores te ha resultado más sorprendente? ¿Por qué?**

Respuesta abierta.

**1.4. Del mismo modo que el precio de una casa puede ser una buena unidad para comprender grandes cantidades de dinero, puedes elegir otras unidades personales que te ayuden a interpretar otros datos. Busca una unidad personal que te ayude a comprender la magnitud de estos titulares.**

**a) El terremoto de Haití deja sin hogar a un millón de personas.**

**b) El incendio de Haifa arrasa 3000 hectáreas de bosque.**

**c) Más de 800 millones de litros de petróleo vertidos en el golfo de México.**

Una unidad podría ser el número de habitantes de su localidad.

## Aprende a pensar > Publicidad engañosa

**Un anuncio televisivo de Muchahorro dice:**

**Primero creamos el 3 × 2; después, la segunda unidad a mitad de precio, y ahora Muchahorro anuncia en exclusiva el descuento 20-30, una promoción más flexible para ti que convierte tu compra en ahorro.**

**Las dos primeras ofertas son conocidas y la nueva consiste en que, si compras dos artículos iguales, te hacen un 20 % de descuento en los dos, y si compras tres, te hacen el 30 %.**

**1.1. Estudia cada una de las ofertas y di cuál es la mejor si quieres comprar 2, 3, 4, 5 o 6 productos iguales.**

Si quiero comprar dos unidades, con la oferta *3 × 2* no obtengo ningún descuento, con *la segunda unidad a mitad de precio* me hacen un 25 % de descuento, y con el *descuento 20-30*, solo un 20 %, así que la mejor es la oferta *la segunda unidad a mitad de precio*.

Si compro tres unidades con la oferta *3 × 2* me hacen un descuento del 33,3 %. Si las compro con *la segunda unidad a mitad de precio* pagaré dos unidades y media, lo que supone un descuento del 16,6 %, y si las compro con el *descuento 20-30*, solo del 30 %. Así que la mejor es la 3 × 2.

Si quiero comprar cuatro unidades, con *3 × 2* tendría que pagar 3 de 4, lo que supone un ahorro del 25 %. Con *la segunda unidad a mitad de precio* también pagaría 3 de 4, y con *descuento 20-30* podría pagar todas con un 20 % de descuento o 3 con un 30 % y la cuarta unidad sin descuento, lo que supone un descuento del 22,5 %, así que las mejores son *3 × 2* y *la segunda unidad a mitad de precio*.

Si quiero comprar cinco unidades, con *3 × 2* tendría que pagar 4 de 5, lo que supone un ahorro del 20 %. Con *la segunda unidad a mitad de precio* también pagaría 4 de 5, y con *descuento 20-30* pagaría dos con un descuento del 20 % y las otras 3 con un descuento del 30 %, lo que supone un descuento del 26 %, así que el *descuento 20-30* es el mejor.

Si quiero comprar seis unidades, con *3 × 2* obtendré un descuento del 33,3 %; con *la segunda unidad a mitad de precio*, un descuento del 25 %, y con *descuento 20-30*, uno del 30 %, así que *3 × 2* es la mejor.

**1.2. La publicidad insinúa que la oferta *descuento 20-30* es la mejor. ¿Es eso cierto en todos los casos? ¿Qué ventajas puede tener sobre las otras?**

No es cierto siempre, pero tiene la ventaja de que me deja elegir entre comprar 2 o 3 artículos iguales.

**1.3. ¿Crees que la publicidad era engañosa? ¿En qué sentido?**

Respuesta abierta.

**1.4. La publicidad afirma que la promoción "convierte tu compra en ahorro". ¿Crees que esto es cierto?**

Respuesta abierta.

**1.5. ¿Te parece que la mayor parte de los consumidores evalúan las ofertas? Si no es así, ¿a qué lo atribuyes? (No conocen las matemáticas suficientes, la información es oscura…). Debate tu opinión en http://matematicas20.aprenderapensar.net/.**

Respuesta abierta.

Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **Juan Jesús Donaire, Vanesa Fernández, Pedro Lomas, Juan Alberto Torresano, Ana María Álvarez, Mariano García, Marta Marcos, Carolina Puente, Joaquín Hernández, María Moreno, Esteban Serrano**

Edición: **Arturo García, Eva Béjar**

Revisión contenidos: **Miguel Nieto**

Corrección: **Ricardo Ramírez**

Ilustración: **Modesto Arregui, Jurado y Rivas, Estudio "Haciendo el león", Félix Anaya, Juan Francisco Cobos, José Santos**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**