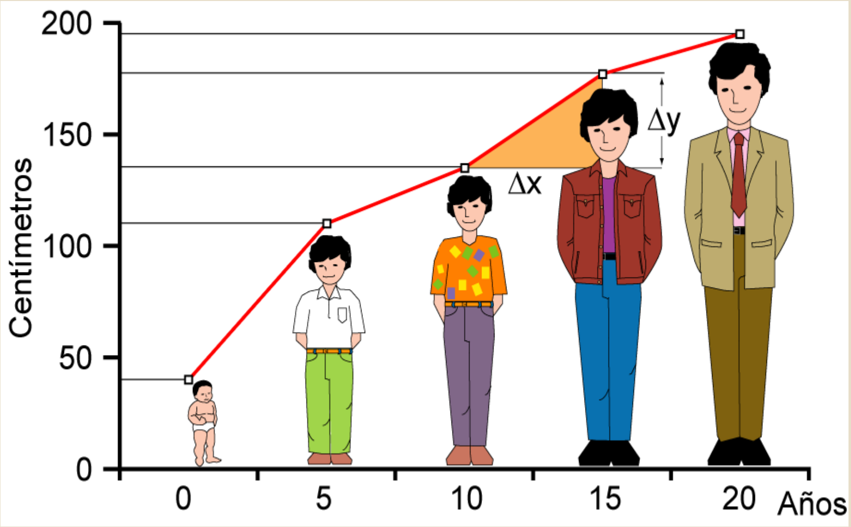
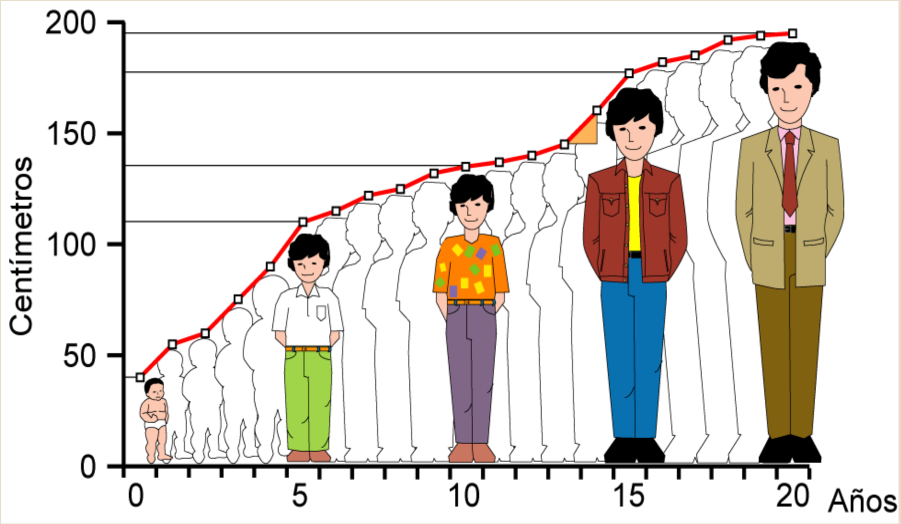
Continuidad
2º Bachillerato

materiales **Editorial SM**

Continuidad en un punto: primera aproximación





Estatura medida cada 5 años: hay grandes saltos entre cada punto y el siguiente.

Estatura medida cada año: el incremento entre cada punto y el siguiente será menor, como lo es también el incremento de tiempo.

Una función es **continua** cuando a pequeñas variaciones de la variable independiente le corresponden pequeñas variaciones de la variable dependiente.

Continuidad en un punto: definición

Una función f(x), definida en $x = a$, es continua en dicho punto cua ndo:

$$\lim_{h \to 0} [f(a + h) - f(a)] = 0$$

Al llamar f(a + h) – f(a) = Dy, si Dx = h→0 entonces Dy →0

Una función f(x), definida en $x = a$, es continua en dicho punto cuando:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Al hacer a + h = x, si h→0 entonces x→a

Una función f(x), definida en $x = a$, es continua en dicho punto cua ndo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Desglosando la definición de límite

Una función f(x), definida en $x = a$, es continua en dicho punto cuando:

- Existe $\lim_{x \to a} f(x)$
- Existe f(a)
- Los dos valores anteriores son iguales

Continuidad en un punto: definición formal

Una función f(x), definida en *x* = *a*, es continua en dicho punto cuando:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Una función f(x) tiene límite L en el punto *x* = *a* si $\forall \varepsilon$ (real) >0 $\exists\ \delta>0$, $\ni$ si:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Usando la definición de continuidad

Usando la definición formal de límite

Definición formal continuidad

Una función f(x), definida en *x*=*a*, es continua en dicho punto si $\forall \varepsilon$ (real) >0 $\exists\ \delta>0$, $\ni$ si:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Continuidad en un intervalo: definición

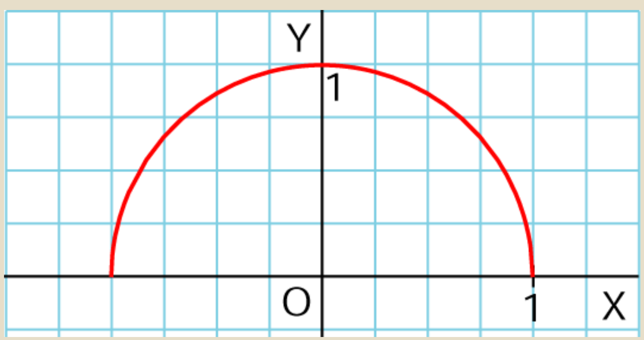
Una función f(x) es continua en *a* por la derecha

si y sólo si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

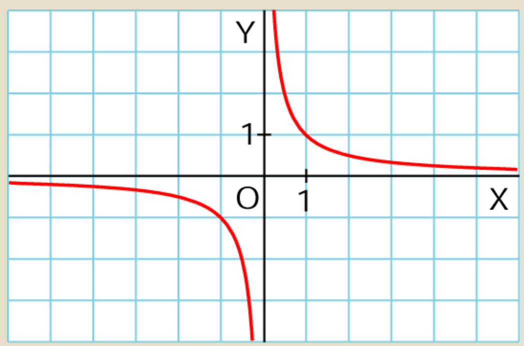
Una función f(x) es continua en *a* por la izquierda

si y sólo si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

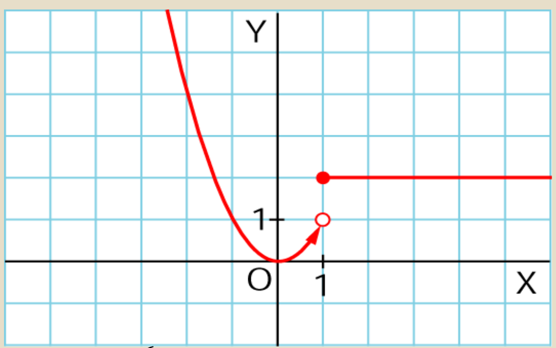
- Una función es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en cada uno de sus puntos.
- Una función es continua en un intervalo cerrado [a, b] si es continua en cada uno de los puntos del intervalo (a, b), y además es continua en *a* por la derecha y en *b* por la izquierda.



$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es continua en [–1, 1], pero no es continua ni en 1 ni en –1 porque no lo es por la derecha o por la izquierda.



$f(x) = \dfrac{1}{x}$ no es continua en [–1, 1], porque no está definida en 0.

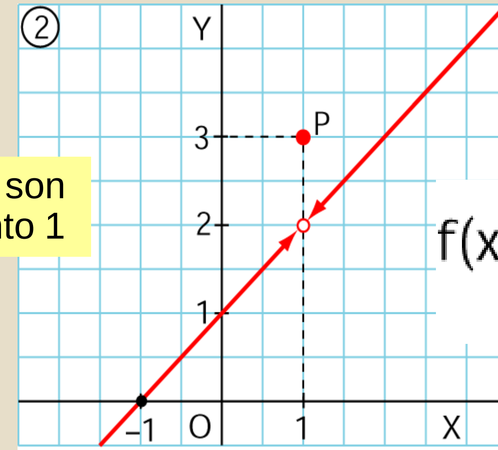


$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 1 \\ 2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ no es continua en [–1, 1], porque no es continua por la izquierda en 1.

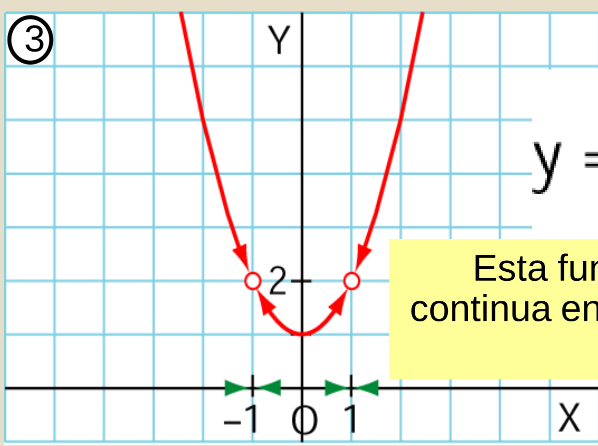
Función discontinua en un punto

Cuando una función no cumple la definición de función continua en un punto se dice que es **discontinua**.

Estas funciones no son continuas en el punto 1

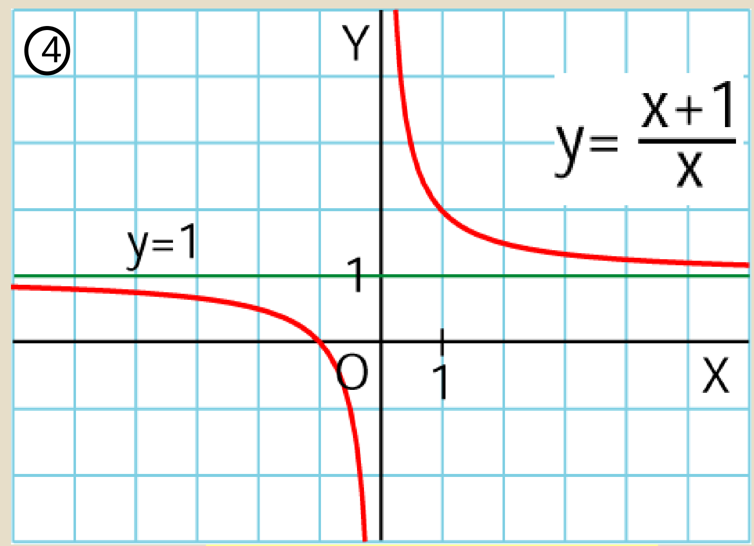


$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{para } x \neq 1 \\ 3, & \text{para } x = 1 \end{cases}$$



$$y = \frac{x^4-1}{x^2-1}$$

Esta función no es continua en los puntos 1 y – 1



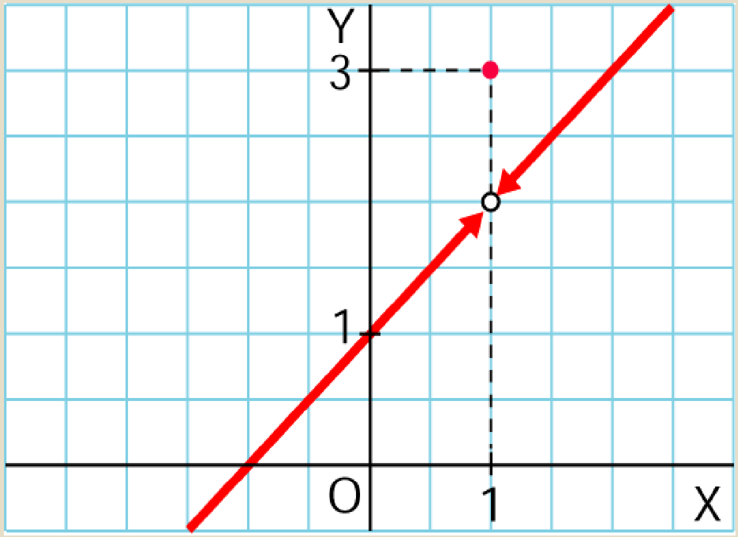
$$y = \frac{x+1}{x}$$

Función discontinua en 0

Discontinuidad evitable

Una función tiene una **discontinuidad evitable** en un punto cuando existe límite en él y no coincide con el valor de la función en el mismo.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$



Estudiamos el comportamiento de f(x) en el punto 1:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2 \neq 3 = f(1)$$

Por tanto f(x) presenta una discontinuidad evitable en el punto 1.

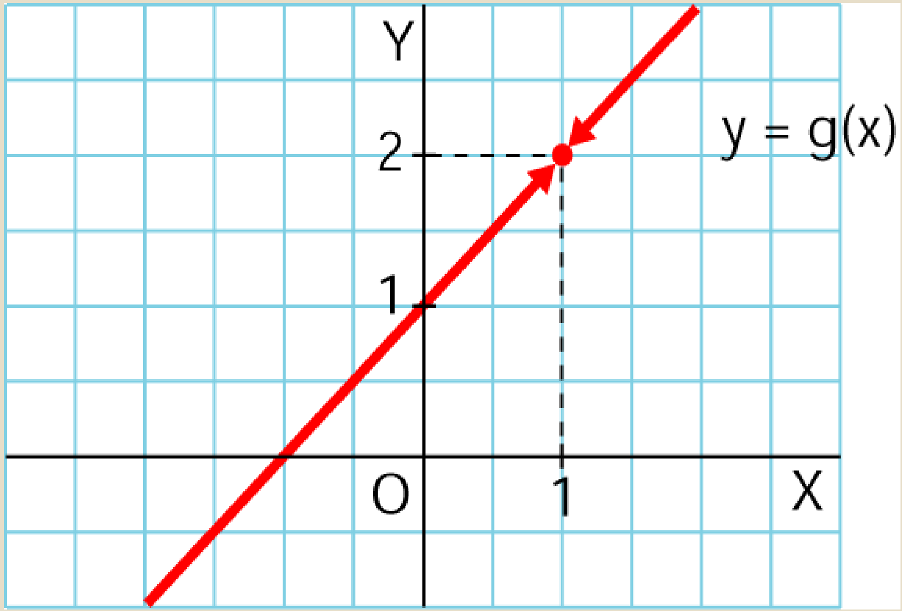
Evitando una discontinuidad evitable

El valor que deberíamos dar a una función en un punto (en el que la función presenta discontinuidad evitable) para que dicha función sea continua es el **verdadero valor de la función** en el punto.

La siguiente función g(x), evita la discontinuidad que presenta f(x) en el punto 1:

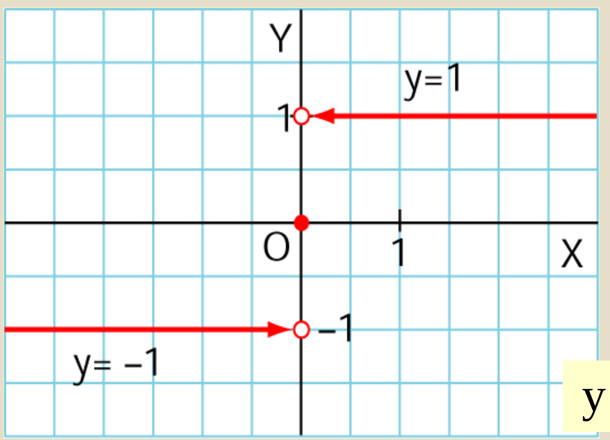
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases} = x + 1$$

- El verdadero valor de f(x) en el punto 1 es 2.
- La función g(x) es continua en el punto 1.

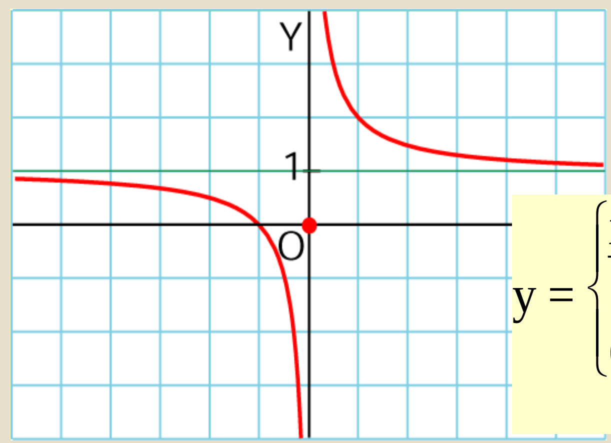


Discontinuidad inevitable

- Una función tiene en un punto una **discontinuidad inevitable** cuando existen los límites laterales en él y son distintos.
- Si f(x) es discontinua en el punto x = a, la diferencia entre los dos límites se llama **salto de la función** en dicho punto.
- Si alguno de los límites laterales en el punto a son infinito, se dice que el salto es infinito



$y = \mathrm{sig}(x)$



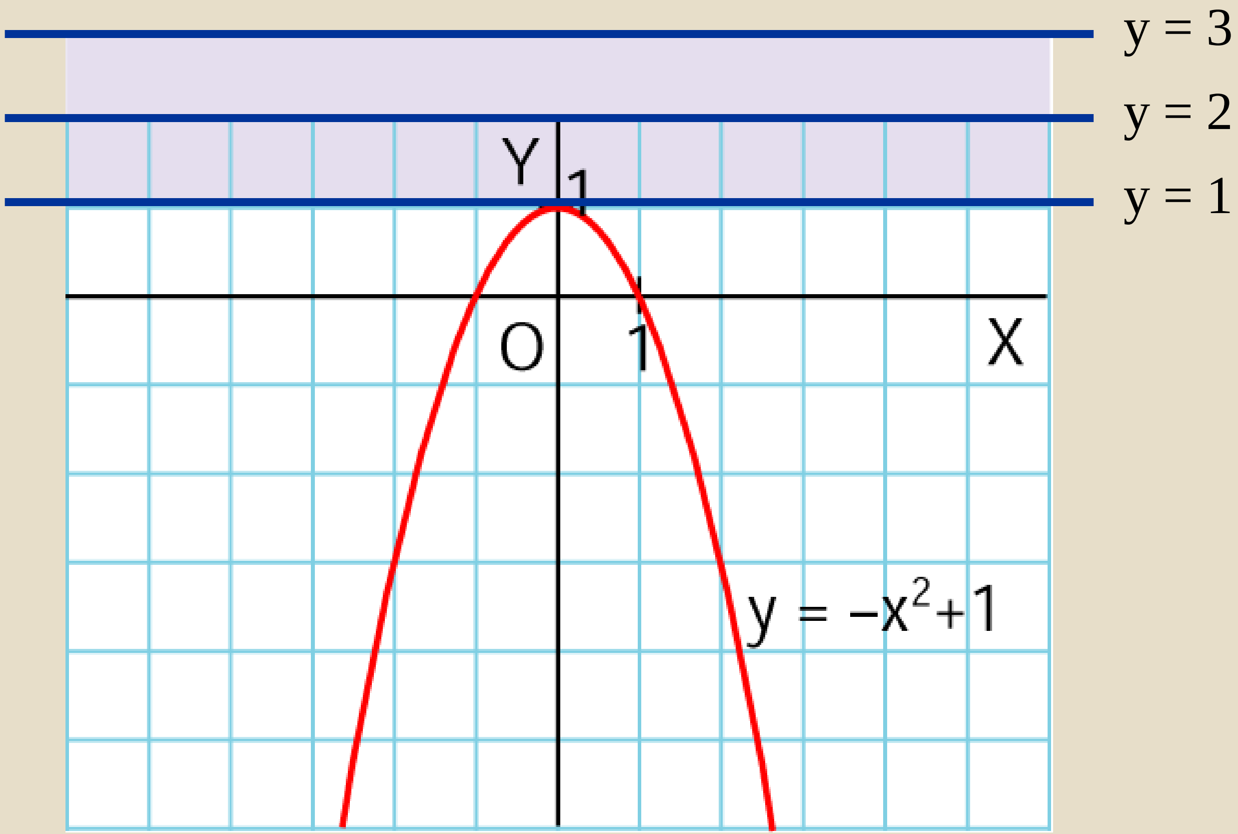
$$y = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

y = sig(x) presenta discontinuidad inevitable en el punto 0 de salto 2.

Esta función presenta discontinuidad inevitable de salto infinito en el punto 0.

Funciones acotadas superiormente

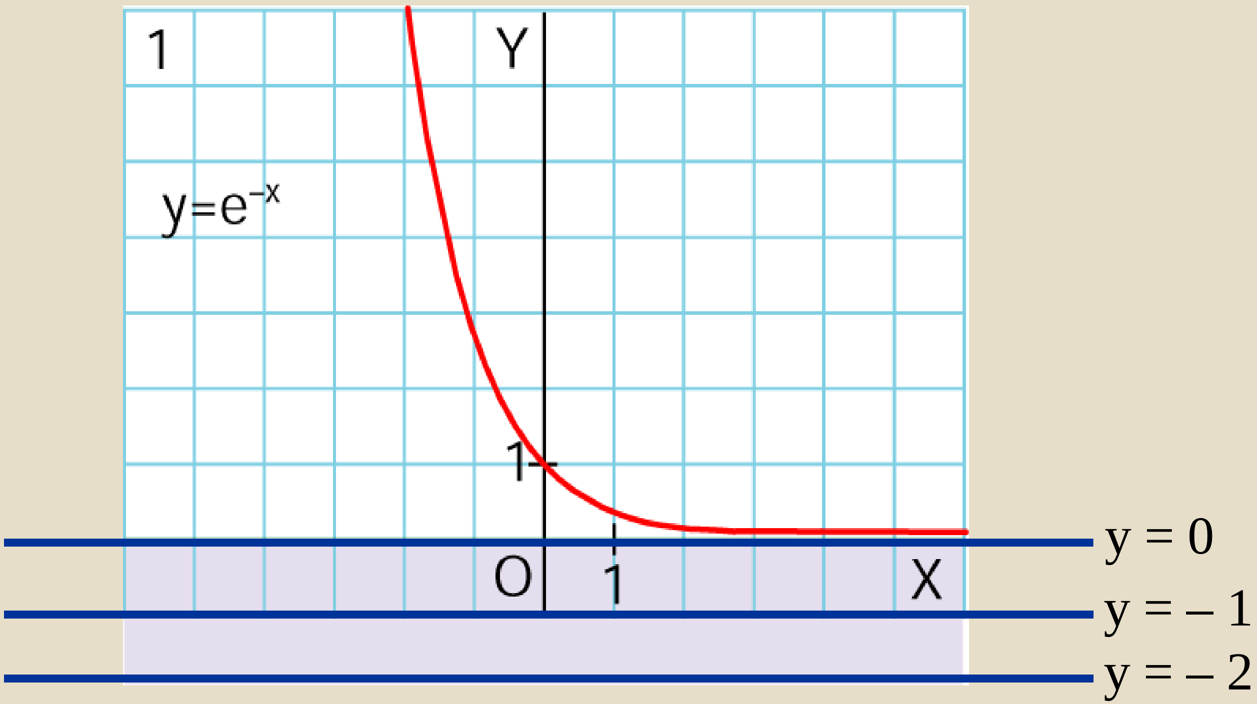
- Una función está **acotada superiormente** cuando existe un número real K' tal que todos los valores que toma la función son menores o iguales que K'.
- El número real K' se llama cota superior.



1, 1.5, 2, p, ... son cotas superiores de la función $y = -x^2 + 1$

Función acotada inferiormente

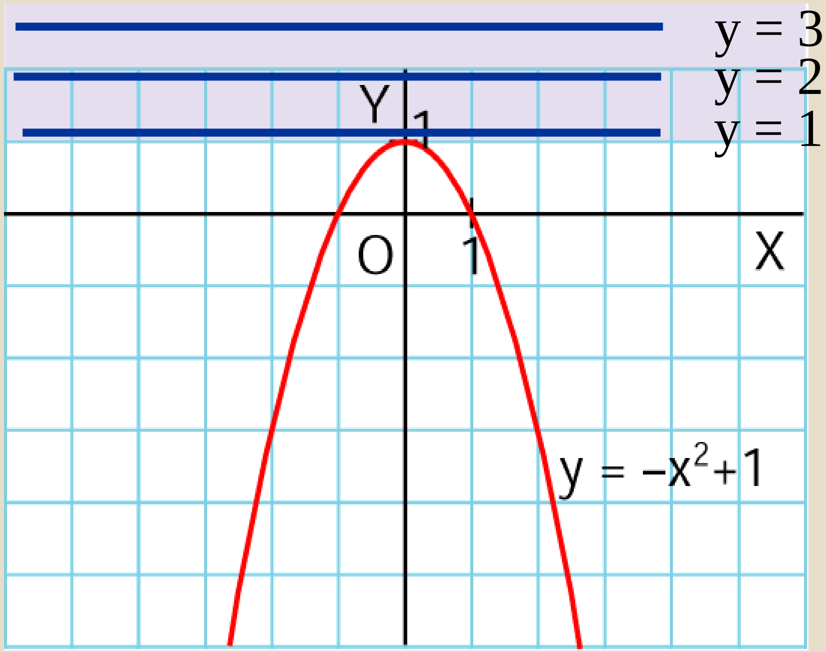
- Una función está **acotada inferiormente** cuando existe un número real K tal que todos los valores que toma la función son mayores o iguales que K.
- El número real K se llama cota inferior.

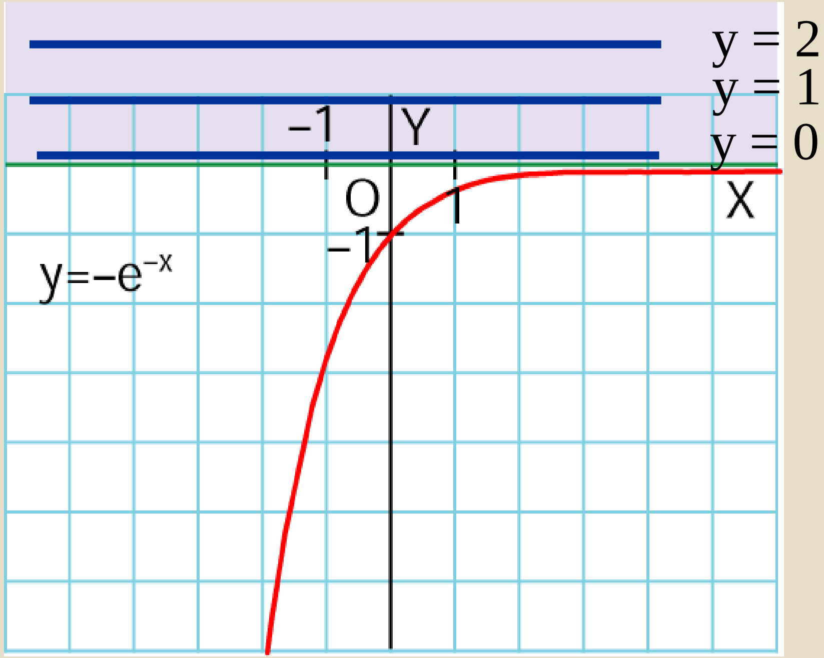


0, –1, –1.5, –p, ... son cotas inferiores de la función y = e^{-x}

Extremo superior. Máximo absoluto

- Se llama **extremo superior** de una función a la menor de las cotas superiores.
- Si ese valor lo alcanza la función, el extremo superior recibe entonces el nombre de **máximo absoluto.**



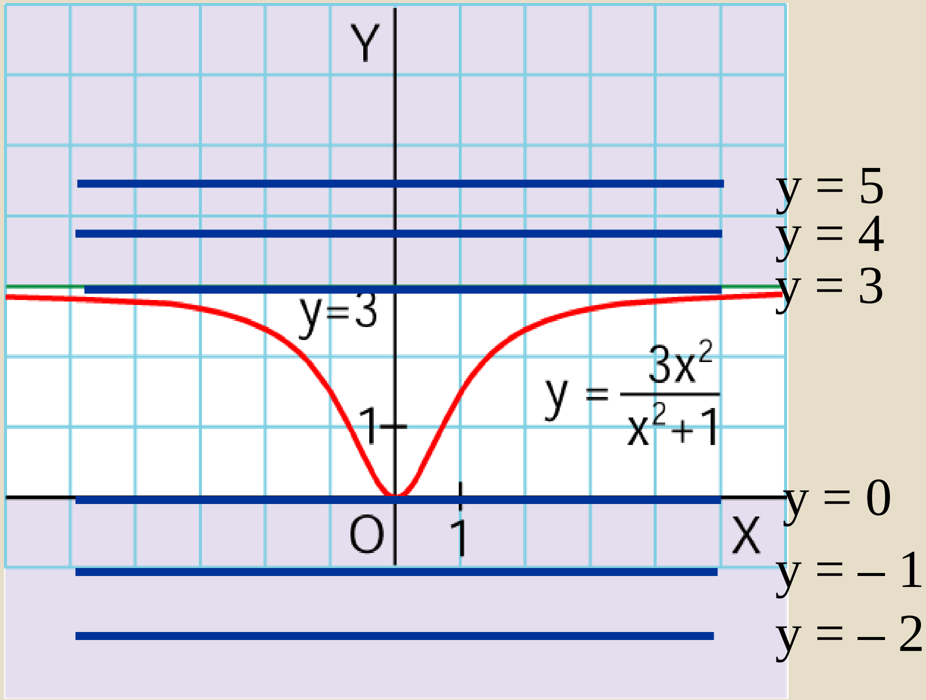


- La menor de las cotas superiores es 1.
- 1 es el extremo superior de esta función.
- Como f(0) = 1, **1 es máximo absoluto de esta función.**

- La menor de las cotas superiores es 0.
- 0 es el extremo superior de esta función.
- Como no existe ningún valor de la función tal que f(a) = 0, **esta función no tiene máximo absoluto.**

Extremo inferior. Mínimo absoluto

- Se llama **extremo inferior** de una función a la mayor de las cotas inferiores.
- Si ese valor lo alcanza la función, el extremo inferior recibe entonces el nombre de **mínimo absoluto.**



- La menor de las cotas superiores es 3.
- 3 es el extremo superior de esta función.
- Como no existe ningún valor de la función tal que f(a) = 3, esta función **no tiene máximo absoluto**.

- La mayor de las cotas inferiores es 0.
- 0 es el extremo inferior de esta función.
- Como además f(0) = 0, 0 **es el mínimo absoluto de esta función.**

Teorema de acotación

Enunciado: Si una función tiene límite finito en un punto "a", está acotada en un entorno reducido de "a"

Demostración:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$ (por def. de límite)

$\forall\, \boldsymbol{\varepsilon}>0$ existe $\boldsymbol{\delta}>0 \ni \forall x \in E^*(a, \delta)$ $\quad f(x) \in E(b, \boldsymbol{\varepsilon})$

lo que indica $\quad \underbrace{b - \boldsymbol{\varepsilon}}_{\substack{h \\ \text{cota inferior}}} < f(x) < \underbrace{b + \varepsilon}_{\substack{k \\ \text{cota superior}}}$

Nota: también podemos expresar la tesis como

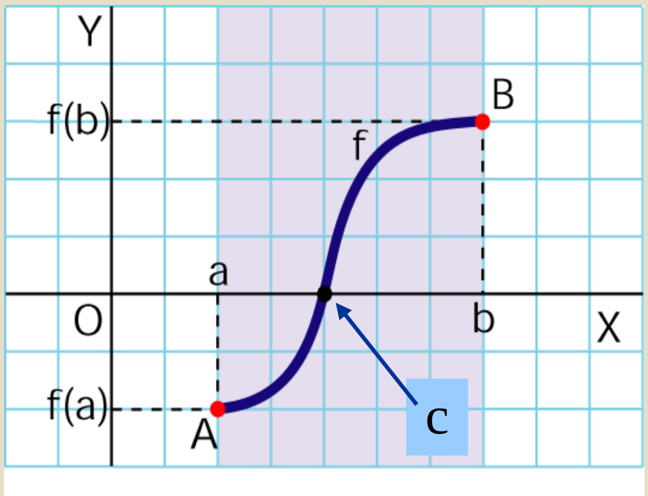
$\forall\, \boldsymbol{\varepsilon}>0\ \exists\, \boldsymbol{\delta}>0$ y $\exists\, \mathbf{h}$ y $\mathbf{k}$ reales positivos $\ni \forall x \in E^*(a, \delta)$

$$h < |f(x)| < k.$$

Luego la función f(x) está acotada

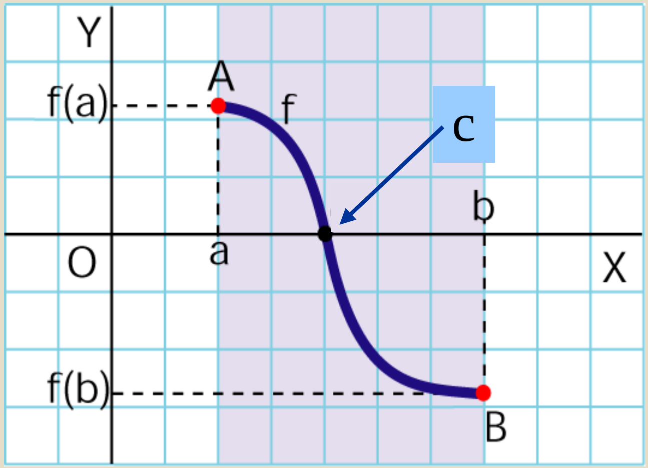
Teorema de Bolzano: Enunciado e interpretación geométrica

Sea f(x) una función continua en un intervalo cerrado [a, b], que toma en *a* y *b* valores de signo opuesto (es decir $f(a) \cdot f(b) < 0$), entonces ∃ al menos un punto *c* interior al intervalo en el que $f(c) = 0$.



f(x) continua en [a, b]
$f(a) < 0$
$f(b) > 0$

Entonces $\exists\, c \in (a, b) \ni f(c) = 0$



f(x) continua en [a, b]
$f(a) > 0$
$f(b) < 0$

Entonces $\exists\, c \in (a, b) \ni f(c) = 0$

Teorema de Bolzano: Demostración (I)

- Supongamos que $f(a)<0$ y $f(b)>0$. (La demostración sería análoga si supusiéramos $f(a)>0$ y $f(b)<0$.)

- Consideremos el punto medio de $[a,b]$: $(a+b)/2$.

- Si $f((a+b)/2)=0$ queda demostrado el teorema.

Si no, f será positiva o negativa en $(a+b)/2$.

Tomemos una de las mitades del intervalo $[a,b]$ donde la función sea negativa en un extremo y positiva en el otro. Llamemos a_1 y b_1 a los extremos de este intervalo. Ahora dividamos $[a_1,b_1]$ a la mitad.

Si f no vale cero en el punto medio, será positiva o negativa. Tomemos la mitad donde f tiene distinto signo en cada extremo, y llamemos a estos puntos a_2 y b_2.

- Si continuamos de esta manera, obtenemos una sucesión de intervalos $[a,b]$, $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, etc., tales que

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \text{ y } b \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n.$$

Es decir,

1) Los a_l forman una sucesión creciente y los b_l forman una sucesión decreciente.

2) Los a_l son siempre menores que los b_l.

Teorema de Bolzano: Demostración (II)

Veamos cuál es el $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n)$

La long. del intervalo $[a_1,b_1]$ es,(b-a)/2 , la mitad de la long. de [a,b] que es b - a.

La longitud del intervalo $[a_2,b_2]$ es $(b - a)/2^2$, la mitad de la longitud de $[a_1,b_1]$ que es (b - a)/2.

Y siguiendo de esta manera, la longitud del intervalo $[a_n,b_n]$ es $(b - a)/2^n$.

3) De modo que,

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0$$

1), 2) y 3) son las condiciones que permiten obtener un único número frontera entre ambas sucesiones y que esté en todos los intervalos.

$$\exists\, c \ni \forall n \quad a_n \le c \le b_n,$$

- Esto significa que, para cualquier entorno de c que consideremos, $\exists$ un intervalo [an,bn] contenido en dicho entorno.

Es decir, para todo $\delta>0$ $\exists$ n_1 / para todo $n >= n_1$ $c-\delta < [a_n,b_n] < c+\delta$.

Teorema de Bolzano: Demostración (III)

Por otro lado, f es continua en [a,b] por hipótesis. Por lo tanto es continua en c. Por definición de continuidad, $\lim_{x \to c} f(x)=f(c)$.

Vamos a proceder por reducción al absurdo

- Supongamos que $f(c)<0$, por teo. de conservación del signo $\exists$ un entorno de c donde f(x) es negativa.

  Dentro de este entorno, $\exists$ un intervalo $[a_n,b_n]$, donde $f(a_n)$ es de distinto signo que $f(b_n)$.

  Esto es una contradicción, por lo tanto f(c) no puede ser negativo.

- Si $f(c)>0$, por teo. de conservación del signo $\exists$ un entorno de c donde f(x) es positiva.

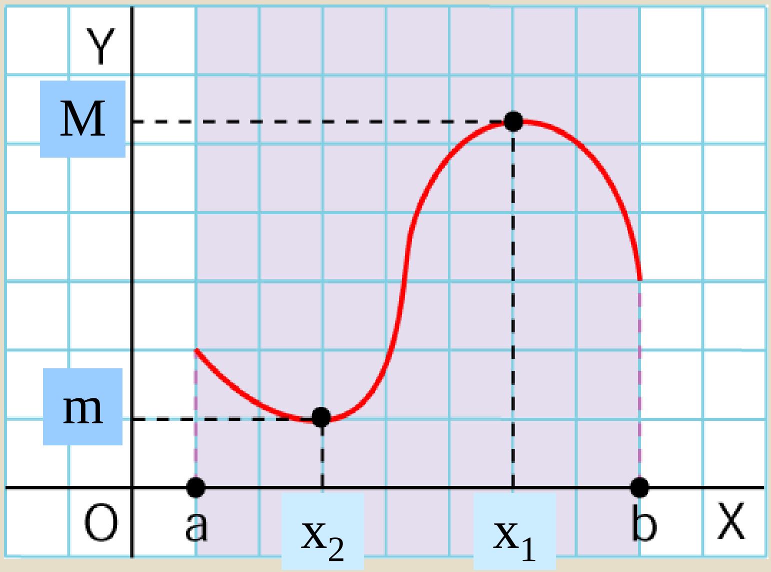
  Pero, otra vez, dentro de ese entorno existe un intervalo $[a_n,b_n]$ tal que $f(a_n)$ es de distinto signo que $f(b_n)$.

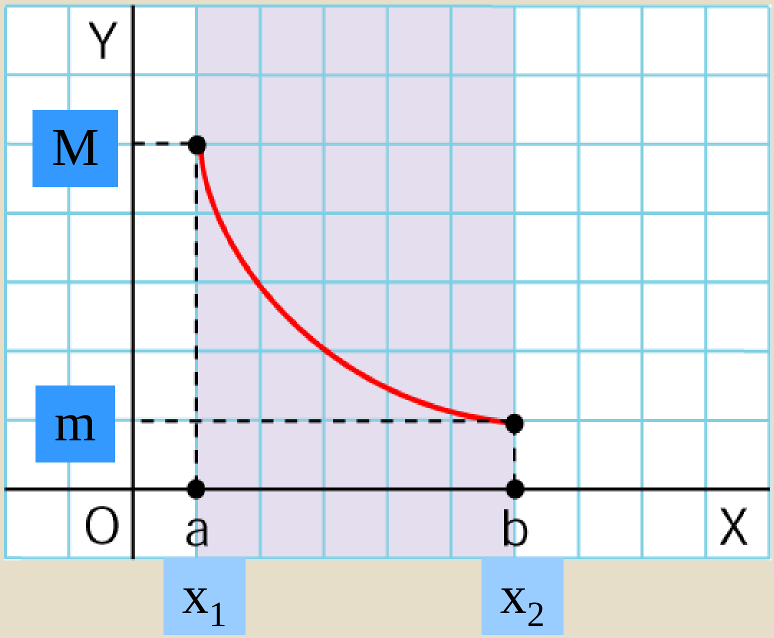
  Esto es una contradicción, por lo tanto f(c) no puede ser positivo.

- **Por lo tanto, no existe otra posibilidad: $f(c)=0$.**

Teorema del máximo – mínimo. Teorema de Weierstrass
Enunciado e interpretación geométrica

Enunciado: Toda función continua en un intervalo cerrado [a, b], alcanza en dicho intervalo al menos un máximo absoluto y un mínimo absoluto.





Esta función, continua en [a, b], presenta en x_1 un máximo absoluto de valor M y en x_2 un mínimo absoluto de valor m.

Esta función, continua en [a, b], presenta en x_1 un máximo absoluto de valor M y en x_2 un mínimo absoluto de valor m.

Teorema del máximo – mínimo. Teorema de Weierstrass Demostración (I)

Se hace la demostración en dos partes

A) La función está acotada en [a,b].

Lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que f no está acotada, Si tomamos x_0 el punto intermedio del intervalo, la función no estará acotada en $[a,x_0]$ o en $[x_0,b]$.

Elegimos de los dos aquel en el que no está acotada y reiteramos el proceso obteniendo así un sucesión de intervalos cerrados encajados y tales que la amplitud tiende a cero. Luego existe un nº real c del intervalo (a,b) que pertenece a todos ellos y por tanto f(c) no está acotada.

Sin embargo, f es continua en todo el intervalo y c está en él, luego es continua en c y por el teorema de acotación f(c) está acotada, lo que lleva a una contradicción.

Por tanto la suposición que hemos hecho no es válida y por ello la función f está acotada en todo el intervalo

Teorema del máximo – mínimo. Teorema de Weierstrass Demostración (II)

B) Por el apartado A) existen un **éxtremo inferior m y un extremo superior M.** Si M es un valor de la función ya estaría demostrado.

En caso contrario **M-f(x)** es distinto de cero.

Construimos la función $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ que está definida y es continua en [a,b].

Por el apartado A) esta función está acotada, luego existe un nº K tal que

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} < K \Rightarrow f(x) < M - \frac{1}{K}$$

Y esto es cierto para todo x del dominio. Por lo que **hemos encontrado una cota menor que el extremo superior** lo que indica una contradicción.

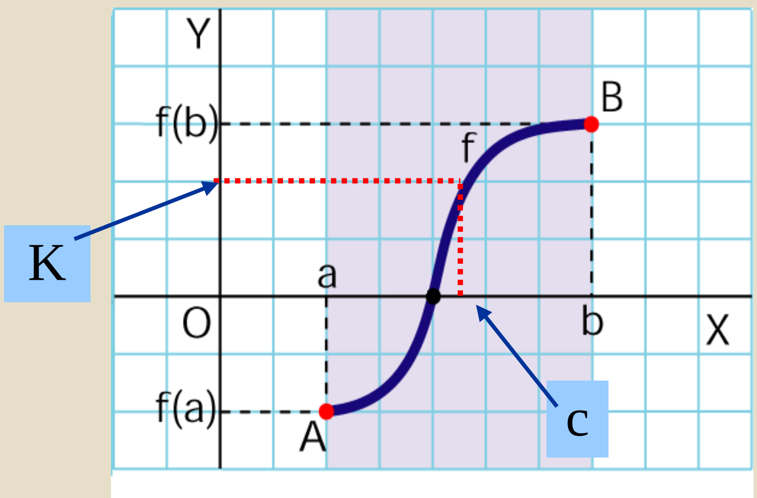
Esta procede de suponer que M – f (x) es no nulo luego M = f(x) por lo que M es máximo.

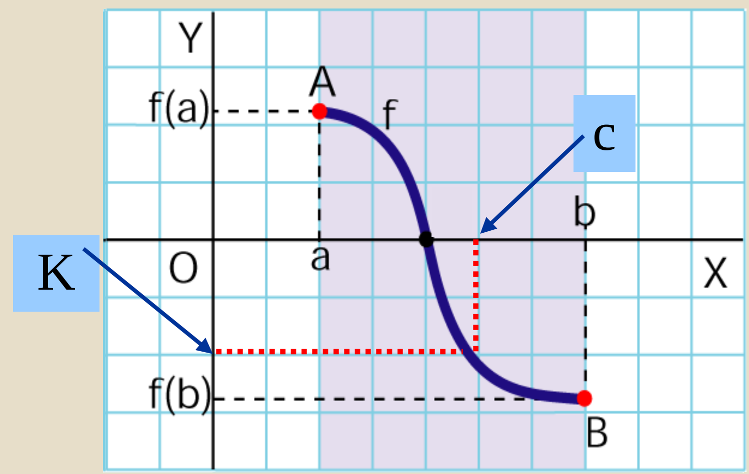
Teorema de los valores intermedios o de Darboux
Enunciado e interpretación geométrica

Sea f(x) una función continua en un intervalo cerrado [a, b] y K un número real tal que:

$$f(a) < K < f(b) \quad o \quad f(b) < K < f(a),$$

entonces existe al menos un punto *c* en el intervalo tal que f(c) = K.





f(x) continua en [a, b]
f(a) < K< f(b)
Entonces ∃ c ∈ (a, b) / f(c) = M

f(x) continua en [a, b]
f(b) < K< f(a)
Entonces ∃ c ∈ (a, b) / f(c) = M

La demostración se hace comprobando que la función g(x) = f(x) – K cumple el teorema de Bolzano luego g(c) = 0 por lo que f(c) = K