

b) Al ser un ángulo del primer cuadrante, las razones trigonométricas son positivas.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + (\sqrt{24})^2}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

c) Al ser un ángulo del cuarto cuadrante, el seno y la tangente son negativos, y el coseno, positivo.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{1 - 0,125^2} = -0,992$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-0,992}{0,125} = -7,736$$

d) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, el seno y el coseno son negativos, y la tangente, positiva.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

6.5. Si $\operatorname{sen} \alpha = 0,2$ y α es agudo, halla:

a) $\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha)$

c) $\cos (-\alpha)$

b) $\cos (90^\circ - \alpha)$

d) $\operatorname{sen} (\alpha + 180^\circ)$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - 0,2^2} = 0,98$$

a) $\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 0,2$

c) $\cos (-\alpha) = \cos \alpha = 0,98$

b) $\cos (90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 0,2$

d) $\operatorname{sen} (\alpha + 180^\circ) = -\operatorname{sen} \alpha = -0,2$

6.6. Calcula los ángulos que cumplen cada una de las siguientes condiciones.

a) $\cos \alpha = -0,44$

c) $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{43}$

b) $\operatorname{sen} \chi = \frac{8}{15}$

d) $\operatorname{sen} \delta = -0,96$

a) $\cos \alpha = -0,44 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 180^\circ - 63,9^\circ + 360^\circ \cdot k = 116,1^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \alpha = 180^\circ + 63,9^\circ + 360^\circ \cdot k = 243,9^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \text{ donde } k \in \mathbb{Z}$

b) $\operatorname{sen} \chi = \frac{8}{15} \Rightarrow \begin{cases} \chi = 32,23^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \chi = 180^\circ - 32,23^\circ + 360^\circ \cdot k = 147,77^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \text{ donde } k \in \mathbb{Z}$

c) $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{43} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 81,33^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \beta = 180^\circ + 81,33^\circ + 360^\circ \cdot k = 261,33^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \Rightarrow \beta = 81,33^\circ + 180^\circ \cdot k \text{ donde } k \in \mathbb{Z}$

d) $\operatorname{sen} \delta = -0,96 \Rightarrow \begin{cases} \delta = 180^\circ + 73,74^\circ + 360^\circ \cdot k = 253,74^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \delta = 360^\circ - 73,74^\circ + 360^\circ \cdot k = 286,26^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \text{ donde } k \in \mathbb{Z}$

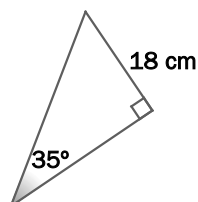
6.7. Demuestra la siguiente igualdad.

$$\frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x}}}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \operatorname{sen}^2 x$$

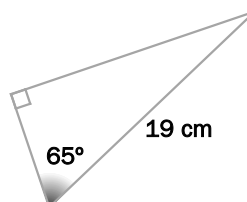
$$\frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot (\operatorname{sen} x + \cos x)}{1 + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot (\operatorname{sen} x + \cos x)}{\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot (\operatorname{sen} x + \cos x)}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \operatorname{sen}^2 x$$

6.8. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.

a)



b)



a) $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{C} = 35^\circ$, $c = 18$ cm, $\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 55^\circ$

$$\operatorname{sen} 35^\circ = \frac{18}{a} \Rightarrow a = \frac{18}{\operatorname{sen} 35^\circ} \approx 31,38 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{18}{b} \Rightarrow b = \frac{18}{\operatorname{tg} 35^\circ} \approx 25,71 \text{ cm}$$

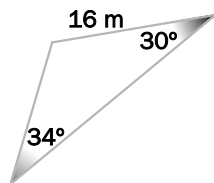
b) $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 65^\circ$, $a = 19$ cm, $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 25^\circ$

$$\operatorname{sen} 65^\circ = \frac{b}{19} \Rightarrow b = 19 \cdot \operatorname{sen} 65^\circ \approx 17,22 \text{ cm}$$

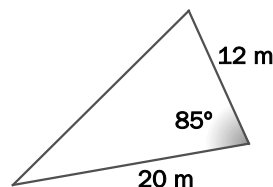
$$\cos 65^\circ = \frac{c}{19} \Rightarrow c = 19 \cdot \cos 65^\circ \approx 8,03 \text{ cm}$$

6.9. Resuelve los siguientes triángulos.

a)



b)



a) $\hat{A} = 34^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$, $a = 16$ m, $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 116^\circ$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \Rightarrow b = \frac{16 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 34^\circ} \approx 14,31 \text{ m}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \Rightarrow c = \frac{16 \cdot \operatorname{sen} 116^\circ}{\operatorname{sen} 34^\circ} \approx 25,72 \text{ m}$$

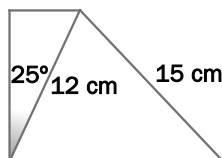
b) $\hat{A} = 85^\circ$, $b = 20$ m, $c = 12$ m

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 20^2 + 12^2 - 2 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \cos 85^\circ \approx 502,17 \Rightarrow a \approx 22,41 \text{ m}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{22,41^2 + 12^2 - 20^2}{2 \cdot 22,41 \cdot 12} \approx 0,458 \Rightarrow \hat{B} \approx 62,74^\circ$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 32,26^\circ$$

6.10. Halla la medida de los lados desconocidos de este trapezio rectángulo.



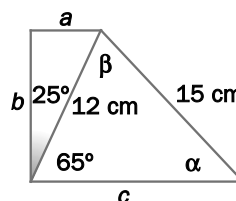
$$\operatorname{sen} 25^\circ = \frac{a}{12} \Rightarrow a = 12 \cdot \operatorname{sen} 25^\circ \approx 5,07 \text{ cm}$$

$$\operatorname{cos} 25^\circ = \frac{b}{12} \Rightarrow b = 12 \cdot \operatorname{cos} 25^\circ \approx 10,89 \text{ cm}$$

$$\frac{12}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{15}{\operatorname{sen} 65^\circ} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{12 \cdot \operatorname{sen} 65^\circ}{15} \approx 0,725 \Rightarrow \alpha \approx 46,47^\circ \text{ (La otra solución no es posible).}$$

$$\beta = 180^\circ - 65^\circ - \alpha = 68,53^\circ$$

$$c^2 = 15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12 \cdot \operatorname{cos} \beta \approx 237,23 \Rightarrow c \approx 15,4 \text{ cm}$$



6.11. La generatriz de un cono mide 26 cm y forma un ángulo de $67,38^\circ$ con el radio de la base. Halla el área total y el volumen del cono.

La altura del cono mide $h = 26 \cdot \operatorname{cos} 67,38^\circ \approx 10 \text{ cm}$.

El radio de la base mide $r = 26 \cdot \operatorname{sen} 67,38^\circ \approx 24 \text{ cm}$.

Por tanto, el área total y el volumen del cono valen, respectivamente:

$$A = \pi r^2 + \pi r g \approx 3769,91 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \approx 6031,86 \text{ cm}^3$$

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Aprende y calcula > El monte Everest

Como ya sabrás, el monte Everest es la montaña más alta de la Tierra, aunque este hecho no se supo hasta el siglo XIX.

El matemático y topógrafo bengalí Radhanath Sikdar fue el primero en medir la altitud de esta montaña, en 1852, con ayuda de un teodolito. Para ello tomó varias medidas desde la India, aunque no fuese la ubicación más cercana, ya que resultaba imposible entrar en Nepal.

Sus mediciones arrojaron que la montaña medía exactamente 29 000 pies, es decir, 8839 m sobre el nivel del mar. Más de 150 años después se han llevado a cabo mediciones más precisas, realizadas con GPS y otros instrumentos desde la cima, que han cifrado la altitud del Everest en 8844 m. Es decir, si las mediciones actuales se aceptan como correctas, Sikdar cometió un error de solo un 0,06%... ¡y sin necesidad de escalar la montaña!

6.1. Antes de empezar, averigua la diferencia entre altura y altitud en Geografía y para qué sirve un teodolito, y descríbelo por escrito.

Altitud: Es la distancia vertical de un punto respecto al nivel del mar.

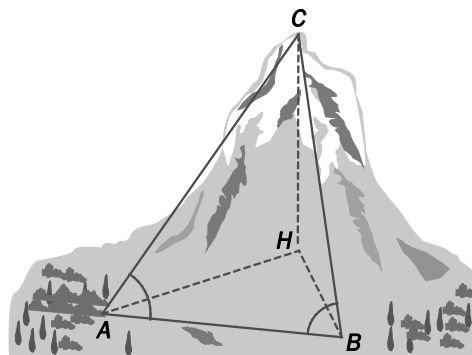
Altura: Es la distancia vertical de un punto respecto a la tierra o cualquier otra superficie tomada como referencia.

El teodolito es un instrumento de medición mecánico-óptico para medir ángulos verticales y horizontales con gran precisión.

- 6.2. Ahora imagina que eres Sikdar y quieres determinar la altura de la cima C de una montaña. Para ello te sitúas con un teodolito en dos puntos A y B situados a la misma altitud y separados entre sí una distancia de 800 m. Efectúas tres mediciones: $\widehat{CAB} = 72^\circ$, $\widehat{ABC} = 75^\circ$ y el ángulo de elevación de la montaña desde A , $\widehat{HAC} = 35^\circ$.

Determina:

- La medida del ángulo $\widehat{ACB}$.
- Las longitudes desde los puntos A y B hasta la cima de la montaña C .
- El punto H , inaccesible, se encuentra a la misma altitud que A y B y en la vertical de C . ¿Qué tipo de triángulo es AHC ?
- Calcula la distancia desde H hasta C .
- Si los puntos A y B están a 1100 m sobre el nivel del mar, ¿cuál es la altitud de la montaña sobre el nivel del mar?



- 33°
- Aplicando el teorema del seno al triángulo ABC obtenemos $AC = 1418,81$ m y $BC = 1396,97$ m.
- Un triángulo rectángulo.
- $HC = AC \cdot \sin 35^\circ = 813,8$ m
- $1100 + 813,8 = 1913,8$ m

- 6.3. ¿En qué continente, en qué cordillera y en la frontera entre qué países se encuentra el Everest? Localízalos en un mapa.

En Asia, en la cordillera del Himalaya. Forma frontera entre China y Nepal.

- 6.4. Investiga brevemente el contexto histórico de la India y Nepal en la fecha de la medición y aventura una hipótesis sobre por qué Sikdar no pudo entrar en Nepal para hacer sus mediciones.

Respuesta abierta.

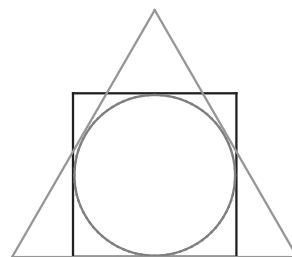
- 6.5. Cuando Sikdar lo midió, el monte Everest se llamaba Pico xv. Muchos indios, entre ellos un primer ministro, han defendido que se dé al monte el nombre de Sikdar.

- ¿Por qué razón se llama Everest?
 - ¿Qué otros nombres ha recibido y qué significaban?
 - ¿Qué países se oponen actualmente al nombre Everest, y cuáles proponen?
- En honor de *sir* George Everest, británico, topógrafo general de la India en 1865.
 - En Nepal, Sagarmatha (la frente del cielo), y en China, Chomolungma (madre del universo).
 - Nepal y China. Proponen los enunciados en el apartado anterior.

Interpreta y descubre > El volumen de una esfera

Se cuenta que Arquímedes hizo grabar sobre su tumba un círculo inscrito a la vez en un cuadrado y en un triángulo equilátero de bases superpuestas, en memoria de uno de sus más bellos descubrimientos: que el volumen de una esfera es dos tercios del volumen del cilindro circunscrito, que a su vez es dos tercios del volumen del cono equilátero circunscrito a la misma esfera.

Y se cuenta también que gracias a este emblema pudo hallar Cicerón la tumba del siracusano, olvidada y cubierta por la maleza, un siglo y medio después de su muerte.



- 6.1. ¿En qué época vivió Arquímedes? Si te fijas en el texto anterior observarás que Arquímedes era “siracusano”. ¿Cuál fue su lugar de nacimiento?

Nació en Siracusa, al este de la isla de Sicilia. Vivió de 287 a. C. a 212 a. C.

- 6.2. Muchos de los logros científicos de Arquímedes han llegado hasta nuestros días. ¿Puedes citar algunos de ellos?

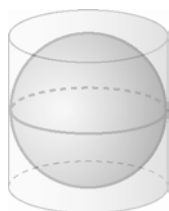
Arquímedes fue matemático, físico, ingeniero, inventor y astrónomo.

De sus logros matemáticos destacan el cálculo del área bajo una parábola, la aproximación del número π , la espiral que lleva su nombre, y el cálculo de superficies y volúmenes de los cuerpos de revolución.

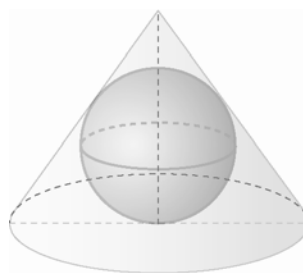
En física destacan el principio de Arquímedes y la palanca.

- 6.3. Utilizando las fórmulas del volumen de la esfera, del cilindro y del cono que él mismo descubrió, comprueba las relaciones que se enuncian en el texto:

a) $V_{\text{esfera}} = \frac{2}{3} V_{\text{cilindro}}$



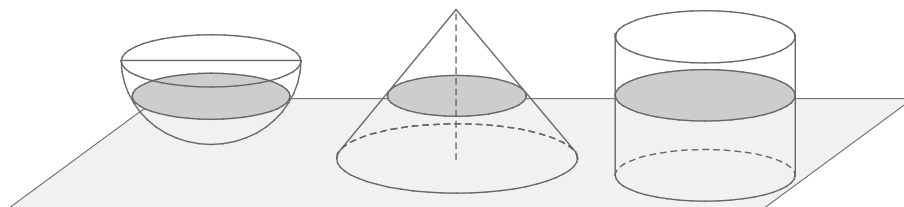
b) $V_{\text{cilindro}} = \frac{2}{3} V_{\text{cono}}$



- a) El volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ y el del cilindro es $V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$, de donde se obtiene la relación.
- b) La altura del triángulo equilátero es $3r$. Por otra parte, si l es el lado de este triángulo, que coincide con el diámetro de la base del cono, la altura debe ser $\frac{\sqrt{3}l}{2}$; por tanto, $\frac{\sqrt{3}l}{2} = 3r$ y se deduce que $l = 2\sqrt{3}r$. De este modo, el volumen del cono es $V = \frac{1}{3} \pi (r\sqrt{3})^2 \cdot 3r = 3\pi r^3$, de donde se obtiene la relación.

- 6.4. Pero ¿cómo obtuvo Arquímedes la fórmula del volumen de la esfera? Interpreta el siguiente texto y, con lápiz y papel, dibuja lo que hizo.

Arquímedes imaginó una esfera inscrita en un cilindro y los dividió ecuatorialmente por la mitad. Tomó por separado la semiesfera, el semicilindro y un cono inscrito en la otra mitad del cilindro. Y luego imaginó los tres sólidos cortados en finísimas “rebanadas” horizontales, o lo que es lo mismo, seccionados por una infinidad de planos paralelos. Vio que para cada corte se cumplía que el área de la sección del cilindro era igual al área de la sección de la

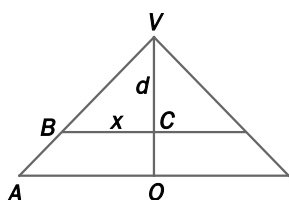


- 6.5. Compruébalo. Para ello ten en cuenta que si el plano que los corta está a una distancia d del vértice del cono, entonces el radio de la sección del cono es d .

a) ¿Por qué? ¿Cuál es el radio de la sección de la semiesfera?

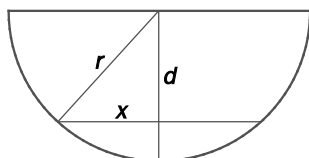
b) Comprueba que $S_{\text{sección del cilindro}} = S_{\text{sección de la semiesfera}} + S_{\text{sección del cono}}$.

a)



Para la primera parte, observa el diagrama.

Los triángulos AOV y BCO son semejantes; además, $AO = OV = r$, luego $x = BC = CV = d$.



Para la segunda parte, observa el diagrama.

$$x^2 = r^2 - d^2 \Rightarrow x = \sqrt{r^2 - d^2}$$

b) Según el apartado anterior.

$$S_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2$$

$$S_{\text{cono}} = \pi \cdot d^2$$

$$S_{\text{semiesfera}} = \pi \cdot (r^2 - d^2) = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot d^2$$

De donde se deduce la relación.

Y anticipándose 2000 años al cálculo integral, dedujo que si esta relación se cumplía para todas las rebanadas, también tendría que cumplirse para sus respectivas sumas, por lo que el volumen del cilindro tenía que ser igual al de la semiesfera más el del cono. Arquímedes conocía las fórmulas que permiten hallar el volumen del cilindro y el del cono, por lo que pudo deducir la fórmula del volumen de la esfera.

- 6.6. Comprueba de una forma práctica la relación anterior. Toma una semiesfera, que puede ser la mitad de una pelota de tenis. Construye en cartulina un cilindro y un cono con las características descritas. Llena la semiesfera y el cono con agua y viértelos en el cilindro.

¿Hasta dónde se llena el cilindro? ¿Cómo lo interpretas?

Respuesta abierta. El cilindro debería llenarse completamente.

Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **Juan Jesús Donaire, Vanesa Fernández, Pedro Lomas, Juan Alberto Torresano, Ana María Álvarez, Mariano García, Marta Marcos, Carolina Puente, Fernando Alcaide, Joaquín Hernández, María Moreno, Esteban Serrano**

Edición: **Arturo García, Eva Béjar, José Miguel Gómez**

Revisión contenidos: **Miguel Nieto**

Corrección: **Ricardo Ramírez**

Ilustración: **Modesto Arregui, Jurado y Rivas, Estudio “Haciendo el león”, Félix Anaya, Juan Francisco Cobos, José Santos**

Fotografía: **Olimpia Torres**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**

Gestión de las direcciones electrónicas:

Debido a la naturaleza dinámica de internet, Ediciones SM no puede responsabilizarse de los cambios o las modificaciones en las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que remite este libro.

Con el objeto de garantizar la adecuación de las direcciones electrónicas de esta publicación, Ediciones SM emplea un sistema de gestión que redirige las URL que con fines educativos aparecen en la misma hacia diversas páginas web. Ediciones SM declina cualquier responsabilidad por los contenidos o la información que pudieran albergar, sin perjuicio de adoptar de forma inmediata las medidas necesarias para evitar el acceso desde las URL de esta publicación a dichas páginas web en cuanto tenga constancia de que pudieran alojar contenidos ilícitos o inapropiados. Para garantizar este sistema de control es recomendable que el profesorado compruebe con antelación las direcciones relacionadas y que comunique a la editorial cualquier incidencia a través del correo electrónico ediciones@grupo-sm.com.

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Dirijase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra, a excepción de las páginas que incluyen la leyenda de “Página fotocopiable”.

© Ediciones SM

Impreso en España – *Printed in Spain*