

6.81. (TIC) Con ayuda de la calculadora, halla las medidas en grados de los siguientes ángulos.

- a) $\text{sen } \hat{A} = 0,249;$ $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$
 b) $\text{cos } \hat{B} = 0,129;$ $270^\circ < \hat{B} < 360^\circ$
 c) $\text{tg } \hat{C} = 2,310;$ $180^\circ < \hat{C} < 270^\circ$
- a) $\hat{A} = 180^\circ - 14^\circ 25' 6'' = 165^\circ 34' 54''$
 b) $\hat{B} = 360^\circ - 82^\circ 35' 17'' = 277^\circ 24' 43''$
 c) $\hat{C} = 180^\circ + 66^\circ 35' 32'' = 246^\circ 35' 32''$

6.82. (TIC) Con ayuda de la calculadora, halla las medidas en radianes de los siguientes ángulos del cuadrante que se indica.

- a) $\text{sen } \hat{A} = 0,559;$ $\frac{\pi}{2} < \hat{A} < \pi$
 b) $\text{cos } \hat{B} = 0,775;$ $\frac{3\pi}{2} < \hat{B} < 2\pi$
 c) $\text{tg } \hat{C} = 1,5;$ $\pi < \hat{C} < \frac{3\pi}{2}$
- a) $\hat{A} = \pi - 0,593 = 2,549 \text{ rad}$
 b) $\hat{B} = 2\pi - 0,684 = 5,599 \text{ rad}$
 c) $\hat{A} = \pi + 0,983 = 4,124 \text{ rad}$

6.83. Sin ayuda de la calculadora, indica los valores de las siguientes razones trigonométricas.

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| a) $\text{sen } 120^\circ$ | e) $\text{cos } 225^\circ$ | i) $\text{tg } 330^\circ$ |
| b) $\text{sen } (-60^\circ)$ | f) $\text{cos } (-150^\circ)$ | j) $\text{tg } 930^\circ$ |
| c) $\text{sen } 150^\circ$ | g) $\text{sen } 225^\circ$ | k) $\text{sen } 300^\circ$ |
| d) $\text{sen } (-210^\circ)$ | h) $\text{cos } (-330^\circ)$ | l) $\text{tg } (-315^\circ)$ |
- a) $\text{sen } 120^\circ = \text{sen } (180^\circ - 60^\circ) = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 b) $\text{sen } (-60^\circ) = -\text{sen } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 c) $\text{sen } 150^\circ = \text{sen } (180^\circ - 30^\circ) = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$
 d) $\text{sen } (-210^\circ) = -\text{sen } 210^\circ = -\text{sen } (180^\circ + 30^\circ) = -(-\text{sen } 30^\circ) = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$
 e) $\text{cos } 225^\circ = \text{cos } (180^\circ + 45^\circ) = -\text{cos } 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 f) $\text{cos } (-150^\circ) = \text{cos } 150^\circ = \text{cos } (180^\circ - 30^\circ) = -\text{cos } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$g) \quad \text{sen } 225^\circ = \text{sen } (180^\circ + 45^\circ) = -\text{sen } 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$h) \quad \cos (-330^\circ) = \cos 330^\circ = \cos (360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$i) \quad \text{tg } 330^\circ = \text{tg } (360^\circ - 30^\circ) = -\text{tg } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$j) \quad \text{tg } 930^\circ = \text{tg } (2 \cdot 360^\circ + 210^\circ) = \text{tg } 210^\circ = \text{tg } (180^\circ + 30^\circ) = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$k) \quad \text{sen } 300^\circ = \text{sen } (360^\circ - 60^\circ) = -\text{sen } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$l) \quad \text{tg } (-315^\circ) = -\text{tg } 315^\circ = -\text{tg } (360^\circ - 45^\circ) = -(-\text{tg } 45^\circ) = \text{tg } 45^\circ = 1$$

6.84. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos de 135° y 225° a partir de las de 45° .

Razones trigonométricas de 135° : como $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$:

$$\text{sen } 135^\circ = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 135^\circ = -\text{tg } 45^\circ = -1$$

Razones trigonométricas de 225° : como $225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$:

$$\text{sen } 225^\circ = -\text{sen } 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 225^\circ = \text{tg } 45^\circ = 1$$

6.85. Si α es un ángulo agudo y $\cos \alpha = \frac{5}{9}$, ¿cuáles son las razones del ángulo $\alpha + 180^\circ$?

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{56}{81}} = \frac{\sqrt{56}}{9} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{14}}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2\sqrt{14}}{5}$$

$$\text{sen } (\alpha + 180^\circ) = -\text{sen } \alpha = -\frac{2\sqrt{14}}{9}$$

$$\cos (\alpha + 180^\circ) = -\cos \alpha = -\frac{5}{9}$$

$$\text{tg } (\alpha + 180^\circ) = \text{tg } \alpha = \frac{2\sqrt{14}}{5}$$

6.86. Si $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ y $0 < \alpha < 90^\circ$, halla:

a) $\sin(\alpha + 180^\circ)$

c) $\cos(180^\circ - \alpha)$

b) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$

d) $\sin(-\alpha)$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

a) $\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha = -\frac{5}{13}$

c) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{12}{13}$

b) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{12}{5}$

d) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha = -\frac{5}{13}$

6.87. (TIC) Resuelve estas ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en grados.

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $1 - 2 \cos x = 0$

d) $\operatorname{tg} x = 1$

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 150^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x = 210^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \text{ donde } k \in \mathbb{Z}$

b) $1 - 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \text{ donde } k \in \mathbb{Z}$

c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 240^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \text{ donde } k \in \mathbb{Z}$

d) $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \text{ donde } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 45 + 180^\circ \cdot k \text{ donde } k \in \mathbb{Z}$

6.88. (TIC) Resuelve estas ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en radianes.

a) $\operatorname{tg} x = -2$

c) $\sin x = 0,81$

b) $1 - 5 \cos x = 6$

d) $4 \sin x + 1 = 0$

a) $\operatorname{tg} x = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2,034 + 2\pi k \\ x = 5,176 + 2\pi k \end{cases} \text{ donde } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2,034 + \pi k \text{ donde } k \in \mathbb{Z}$

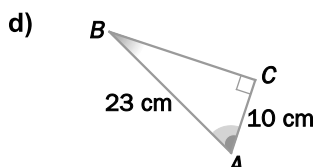
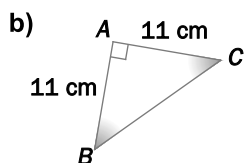
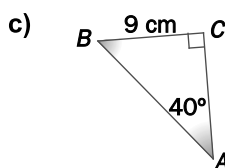
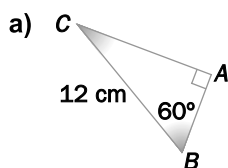
b) $1 - 5 \cos x = 6 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k = (2k + 1)\pi \text{ donde } k \in \mathbb{Z}$

c) $\sin x = 0,81 \Rightarrow \begin{cases} x = 0,944 + 2\pi k \\ x = 2,198 + 2\pi k \end{cases} \text{ donde } k \in \mathbb{Z}$

d) $4 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 3,394 + 2\pi k \\ x = 6,031 + 2\pi k \end{cases} \text{ donde } k \in \mathbb{Z}$

Resolución de triángulos

6.89. (TIC) Calcula la medida de los ángulos y lados desconocidos en los siguientes triángulos rectángulos.



a) $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $a = 12$ cm

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 30^\circ$$

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cos \hat{B} = 12 \cdot \cos 60^\circ = 6 \text{ cm}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \sin \hat{B} = 12 \cdot \sin 60^\circ = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \approx 10,39 \text{ cm}$$

b) $\hat{A} = 90^\circ$, $b = 11$ cm, $c = 11$ cm

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{11^2 + 11^2} = \sqrt{242} \approx 15,56 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{11}{11} = 1 \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$$

$$\hat{C} = \hat{B} = 45^\circ$$

c) $\hat{A} = 40^\circ$, $\hat{C} = 90^\circ$, $a = 9$ cm

$$\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 50^\circ$$

$$\sin \hat{A} = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{9}{\sin 40^\circ} \approx 14 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\operatorname{tg} \hat{A}} = \frac{9}{\operatorname{tg} 40^\circ} \approx 10,73 \text{ cm}$$

d) $\hat{C} = 90^\circ$, $b = 10$ cm, $c = 23$ cm

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{23^2 - 10^2} = \sqrt{429} \approx 20,71 \text{ cm}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{b}{c} = \frac{10}{23} \approx 0,435 \Rightarrow \hat{A} \approx 64^\circ 12' 53''$$

$$\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 25^\circ 47' 7''$$

6.90. (TIC) Resuelve los triángulos sabiendo que $\hat{C}$ es un ángulo recto.

a) $\hat{A} = 55^\circ$, $a = 18$ cm

b) $c = 10$ cm, $b = 6$ cm

c) $a = 18$ cm, $b = 15$ cm

a) $\hat{A} = 55^\circ$, $\hat{C} = 90^\circ$, $a = 18$ cm

$$\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 35^\circ$$

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{18}{\operatorname{sen} 55^\circ} \approx 21,97 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\operatorname{tg} \hat{A}} = \frac{18}{\operatorname{tg} 55^\circ} \approx 12,6 \text{ cm}$$

b) $\hat{C} = 90^\circ$, $b = 6$ cm, $c = 10$ cm

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{b}{c} = \frac{6}{10} = 0,6 \Rightarrow \hat{A} \approx 53^\circ 7' 48''$$

$$\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 36^\circ 52' 12''$$

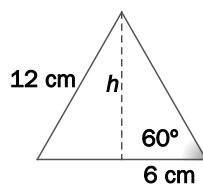
c) $\hat{C} = 90^\circ$, $a = 18$ cm, $b = 15$ cm

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{18^2 + 15^2} = \sqrt{339} \approx 18,41 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{18}{15} = 1,2 \Rightarrow \hat{A} \approx 50^\circ 11' 40''$$

$$\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 39^\circ 48' 20''$$

6.91. Halla la longitud de la altura de un triángulo equilátero de 12 centímetros de lado.



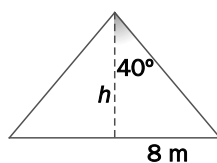
Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10,39 \text{ cm}$$

También podemos aplicar las razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{12} \Rightarrow h = 12 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \approx 10,39 \text{ cm}$$

6.92. (TIC) El lado desigual de un triángulo isósceles mide 16 metros, y el ángulo desigual, 80° . ¿Cuál es la medida de la altura sobre este lado?



$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{8}{h} \Rightarrow h = \frac{8}{\operatorname{tg} 40^\circ} \approx 9,53 \text{ m}$$

- 6.93. (TIC) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 cm, y la proyección de uno de los catetos sobre ella, 4 cm. Resuelve el triángulo.

$$A = 90^\circ, a = 20 \text{ cm}$$

Aplicando el teorema del cateto:

$$c^2 = 20 \cdot 4 = 80 \Rightarrow c \approx 8,94 \text{ cm}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras:

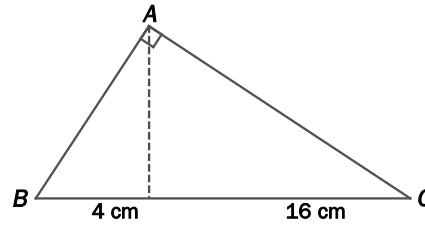
$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{320} \approx 17,89 \text{ cm}$$

Aplicando las razones trigonométricas:

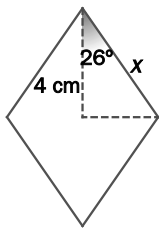
$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} = 0,8945 \Rightarrow B \approx 63^\circ 26' 39''$$

Por último:

$$C = 180^\circ - A - B = 26^\circ 33' 21''$$



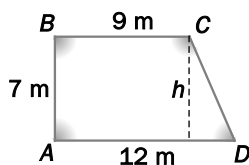
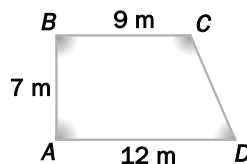
- 6.94. (TIC) La diagonal mayor de un rombo mide 8 cm y forma con cada lado contiguo un ángulo de 26° . ¿Cuánto mide el lado del rombo?



Llamando x al lado del rombo:

$$\cos 26^\circ = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{4}{\cos 26^\circ} \approx 4,45 \text{ cm}$$

- 6.95. Halla la medida de los ángulos de este trapezio rectángulo.

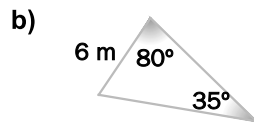
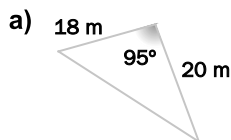


$$A = B = 90^\circ$$

$$\operatorname{tg} D = \frac{7}{3} \Rightarrow D \approx 66^\circ 48' 5''$$

$$C = 360^\circ - A - B - D \approx 113^\circ 11' 55''$$

6.96. (TIC) Resuelve estos triángulos.



a) $\hat{A} = 95^\circ$, $b = 18$ m, $c = 20$ m

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = 18^2 + 20^2 - 2 \cdot 18 \cdot 20 \cdot \cos 95^\circ \approx 786,75 \Rightarrow a \approx 28,05 \text{ m}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{28,05^2 + 20^2 - 18^2}{2 \cdot 28,05 \cdot 20} \approx 0,769 \Rightarrow \hat{B} \approx 39^\circ 44' 9''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 45^\circ 15' 51''$$

b) $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{C} = 35^\circ$, $c = 6$ m

$$\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 65^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow a = \frac{c \sin \hat{A}}{\sin \hat{C}} = \frac{6 \sin 80^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 10,3 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow b = \frac{c \sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} = \frac{6 \sin 65^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 6,52 \text{ m}$$

6.97. (TIC) Halla la medida de los ángulos y los lados desconocidos en cada caso.

a) $\hat{A} = 56^\circ$ $b = 14$ cm $c = 8$ cm

b) $\hat{B} = 45^\circ$ $\hat{C} = 75^\circ$ $a = 25$ cm

c) $a = 38$ cm $b = 46$ cm $c = 22$ cm

d) $\hat{A} = 42^\circ$ $\hat{C} = 65^\circ$ $b = 14$ cm

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 14^2 + 8^2 - 2 \cdot 14 \cdot 8 \cdot \cos 56^\circ \approx 134,74 \Rightarrow a \approx 11,61$ cm

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{11,61^2 + 8^2 - 14^2}{2 \cdot 11,61 \cdot 8} \approx 0,015 \Rightarrow \hat{B} \approx 89^\circ 8' 20''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 34^\circ 51' 40''$$

b) $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 60^\circ$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow b = \frac{a \sin \hat{B}}{\sin \hat{A}} = \frac{25 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 20,41 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} = \frac{25 \cdot \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 27,88 \text{ cm}$$

c) $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{46^2 + 22^2 - 38^2}{2 \cdot 46 \cdot 22} \approx 0,571 \Rightarrow \hat{A} \approx 55^\circ 10' 48''$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{38^2 + 22^2 - 46^2}{2 \cdot 38 \cdot 22} \approx -0,112 \Rightarrow \hat{B} \approx 96^\circ 25' 50''$$

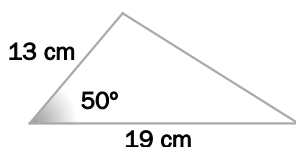
$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 28^\circ 23' 22''$$

d) $\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 73^\circ$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow a = \frac{b \sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} = \frac{14 \cdot \sin 42^\circ}{\sin 73^\circ} \approx 9,8 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow c = \frac{b \sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} = \frac{14 \cdot \sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} \approx 13,27 \text{ cm}$$

6.98. (TIC) Resuelve el triángulo. ¿De qué tipo es?



$$\hat{A} = 50^\circ, b = 13 \text{ cm}, c = 19 \text{ cm}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = 13^2 + 19^2 - 2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot \cos 50^\circ \approx 212,46 \Rightarrow a \approx 14,58 \text{ cm}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{14,58^2 + 19^2 - 13^2}{2 \cdot 14,58 \cdot 19} \approx 0,730 \Rightarrow \hat{B} \approx 43^\circ 5' 40''$$

$$C = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 86^\circ 54' 20''$$

Es un triángulo acutángulo.

6.99. (TIC) Resuelve los siguientes triángulos.

a) $a = 3 \text{ cm}$ $b = 2 \text{ cm}$ $\hat{C} = 140^\circ$

b) $a = 19 \text{ cm}$ $b = 8 \text{ cm}$ $\hat{B} = 62^\circ$

a) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 140^\circ \approx 22,19 \Rightarrow c \approx 4,7 \text{ cm}$

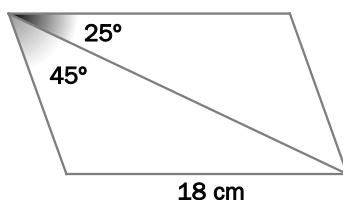
$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3^2 + 4,7^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4,7} \approx 0,961 \Rightarrow \hat{B} \approx 16^\circ 7' 45''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 23^\circ 52' 15''$$

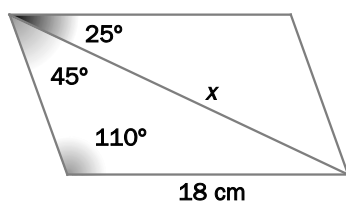
b) $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{a \sin \hat{B}}{b} = \frac{19 \sin 62^\circ}{8} \approx 2,097$

Como el seno de un ángulo no puede ser mayor que 1, deducimos que no existe ningún triángulo con las condiciones dadas.

6.100. (TIC) Halla la medida de la diagonal del paralelogramo.

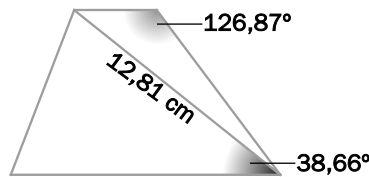


En un paralelogramo, los ángulos opuestos miden lo mismo y los ángulos contiguos suman 180° ; por tanto, la situación es la siguiente:

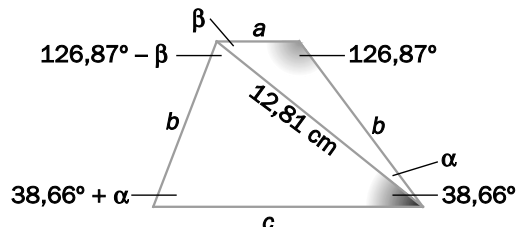


$$\frac{x}{\sin 110^\circ} = \frac{18}{\sin 45^\circ} \Rightarrow x = \frac{18 \sin 110^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 23,92 \text{ cm}$$

6.101. (TIC) Halla los lados del trapecio isósceles.



La situación es la siguiente:



En los dos triángulos de la figura, los ángulos suman 180° , es decir:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta + 126,87^\circ = 180^\circ \\ \alpha - \beta + 38,66^\circ = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 53,13^\circ \\ \alpha - \beta = -24,19^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 14,47^\circ \\ \beta = 38,66^\circ \end{array}$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\sin 14,47^\circ} = \frac{12,81}{\sin 126,87^\circ} \Rightarrow a \approx 4 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{\sin 38,66^\circ} = \frac{12,81}{\sin 126,87^\circ} \Rightarrow b \approx 10 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\sin 88,21^\circ} = \frac{12,81}{\sin 53,13^\circ} \Rightarrow c \approx 16 \text{ cm}$$

Longitudes y áreas de figuras planas

6.102. Al unir los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrado se obtienen dos rectángulos, y al trazar la diagonal, dos triángulos. ¿Cuál es la relación entre las áreas de los rectángulos y los triángulos obtenidos?

Al unir los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrado se obtienen dos rectángulos iguales, cada uno con área la mitad del área del cuadrado original. Al trazar la diagonal se obtienen dos triángulos iguales, cada uno con área la mitad del área del cuadrado original. Por tanto, las áreas del rectángulo y del triángulo coinciden, es decir, la razón de áreas es 1.

6.103. (TIC) Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo miden 14,4 y 25,6 cm. Calcula el área del triángulo.

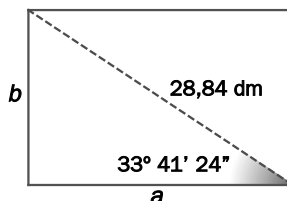
La hipotenusa mide 40 cm.

Llamando x e y a los catetos, cuya proyección sobre la hipotenusa mide, respectivamente, 14,4 y 25,6 cm, y aplicando el teorema del cateto, obtenemos:

$$x^2 = 14,4 \cdot 40 = 576 \Rightarrow x = 24 \text{ cm} \qquad y^2 = 25,6 \cdot 40 = 1024 \Rightarrow y = 32 \text{ cm}$$

$$\text{Por tanto, el área del triángulo vale } S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 32 = 384 \text{ cm}^2.$$

- 6.104. (TIC) La diagonal de un rectángulo mide 28,84 decímetros y forma con la base un ángulo de $33^\circ 41' 24''$. Halla su perímetro y su área.



$$\operatorname{sen}(33^\circ 41' 24'') = \frac{b}{28,84} \Rightarrow b = 28,84 \cdot \operatorname{sen}(33^\circ 41' 24'') \approx 16 \text{ dm}$$

$$\operatorname{cos}(33^\circ 41' 24'') = \frac{a}{28,84} \Rightarrow a = 28,84 \cdot \operatorname{cos}(33^\circ 41' 24'') \approx 24 \text{ dm}$$

De este modo, el perímetro y el área valen, respectivamente, $P = 80 \text{ dm}$ y $A = 384 \text{ dm}^2$.

- 6.105. (TIC) El lado de un octógono regular mide 20 cm. Calcula la medida de la apotema y el área del octógono.

$$\text{La apotema mide } \operatorname{tg}\left(\frac{360^\circ}{16}\right) = \frac{10}{a_p} \Rightarrow a_p = \frac{10}{\operatorname{tg} 22,5^\circ} \approx 24,14 \text{ cm}.$$

$$\text{El área vale } S = \frac{8 \cdot 20 \cdot 24,14}{2} = 1931,2 \text{ cm}^2.$$

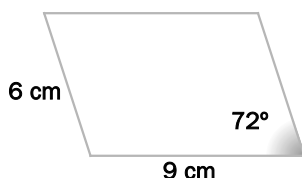
- 6.106. (TIC) Calcula la longitud de la circunferencia que se traza con un compás cuyos brazos miden 7 centímetros y forman un ángulo de 70° .

Si r es el radio de la circunferencia, tenemos:

$$\operatorname{sen} 35^\circ = \frac{r/2}{7} \Rightarrow r = 14 \cdot \operatorname{sen} 35^\circ \approx 8,03 \text{ cm}$$

Por tanto, la longitud de la circunferencia vale $L = 2 \cdot \pi \cdot r \approx 50,45 \text{ cm}$.

- 6.107. (TIC) Halla el área de este paralelogramo.

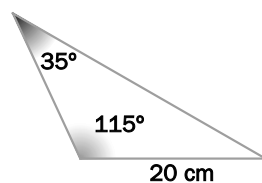


Si h es la altura del paralelogramo, tenemos:

$$\operatorname{sen} 72^\circ = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 6 \cdot \operatorname{sen} 72^\circ \approx 5,71 \text{ cm}$$

Por tanto, el área del paralelogramo vale $S = 9 \cdot 5,71 = 51,39 \text{ cm}^2$.

6.108. (TIC) Calcula el perímetro de este triángulo.



$$\hat{A} = 35^\circ, \hat{B} = 115^\circ, a = 20 \text{ cm}$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 30^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow b = \frac{a \sin \hat{B}}{\sin \hat{A}} = \frac{20 \cdot \sin 115^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 31,6 \text{ cm}$$

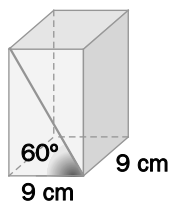
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} = \frac{20 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 17,43 \text{ cm}$$

El perímetro del triángulo vale, por tanto, $P = 20 + 31,6 + 17,43 = 69,03 \text{ cm}$.

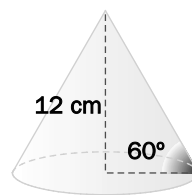
Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

6.109. (TIC) Calcula el área total y el volumen de estos cuerpos geométricos.

a)



b)



a) Necesitamos calcular la altura h del ortoedro.

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{9} \Rightarrow h = 9 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \approx 15,59 \text{ cm}$$

De este modo, el área total y el volumen del ortoedro valen, respectivamente:

$$A = 2 \cdot 9^2 + 4 \cdot 9 \cdot 15,59 = 723,24 \text{ cm}^2$$

$$V = 9^2 \cdot 15,59 = 1262,79 \text{ cm}^3$$

b) Necesitamos calcular el radio r de la base y la generatriz g .

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{12}{r} \Rightarrow r = \frac{12}{\operatorname{tg} 60^\circ} \approx 6,93 \text{ cm}$$

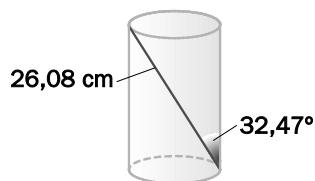
$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{12}{g} \Rightarrow g = \frac{12}{\operatorname{sen} 60^\circ} \approx 13,86 \text{ cm}$$

De este modo, el área total y el volumen del cono valen, respectivamente:

$$A = \pi r^2 + \pi r g \approx 452,62 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \approx 603,5 \text{ cm}^3$$

6.110. (TIC) Calcula el volumen del cilindro.



Necesitamos calcular el radio r de la base y la altura h .

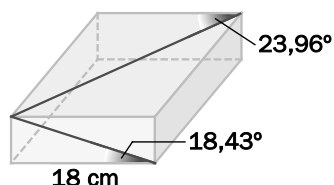
$$\operatorname{sen} 32,47^\circ = \frac{2r}{26,08} \Rightarrow r = \frac{26,08 \cdot \operatorname{sen} 32,47^\circ}{2} \approx 7 \text{ cm}$$

$$\operatorname{cos} 32,47^\circ = \frac{h}{26,08} \Rightarrow h = 26,08 \cdot \operatorname{cos} 32,47^\circ \approx 22 \text{ cm}$$

De este modo, el volumen del cilindro vale:

$$V = \pi r^2 h \approx 3386,64 \text{ cm}^3$$

6.111. (TIC) Halla el área total y el volumen del ortoedro.



Llamando, respectivamente, a y b a la altura y profundidad del ortoedro:

$$\operatorname{tg} 18,43^\circ = \frac{a}{18} \Rightarrow a = 18 \cdot \operatorname{tg} 18,43^\circ \approx 6 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} 23,96^\circ = \frac{b}{18} \Rightarrow b = 18 \cdot \operatorname{tg} 23,96^\circ \approx 8 \text{ cm}$$

De este modo, el área total y el volumen del ortoedro valen, respectivamente:

$$A = 2 \cdot (18 \cdot 6 + 18 \cdot 8 + 6 \cdot 8) = 600 \text{ cm}^2$$

$$V = 18 \cdot 6 \cdot 8 = 864 \text{ cm}^3$$

6.112. (TIC) La generatriz de un cono mide 10 decímetros, y el ángulo que forma esta con la altura del cono es de 36° . Calcula el área total y el volumen del cono.

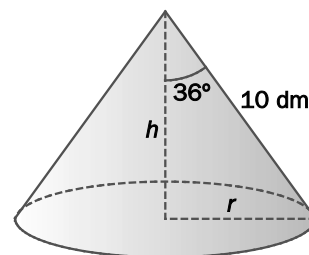
$$\operatorname{sen} 36^\circ = \frac{r}{10} \Rightarrow r = 10 \cdot \operatorname{sen} 36^\circ \approx 5,88 \text{ dm}$$

$$\operatorname{cos} 36^\circ = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \cdot \operatorname{cos} 36^\circ \approx 8,09 \text{ dm}$$

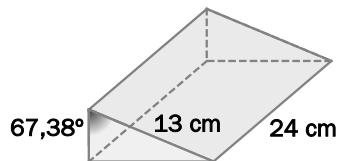
De este modo, el área total y el volumen del cono valen, respectivamente:

$$A = \pi r^2 + \pi r g \approx 293,34 \text{ dm}^2$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \approx 292,91 \text{ dm}^3$$



6.113. (TIC) Calcula el volumen del prisma.



Los catetos de la base del prisma miden:

$$\operatorname{sen} 67,38^\circ = \frac{c}{13} \Rightarrow c = 13 \cdot \operatorname{sen} 67,38^\circ \approx 12 \text{ cm}$$

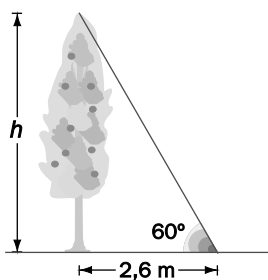
$$\cos 67,38^\circ = \frac{b}{13} \Rightarrow b = 13 \cdot \cos 67,38^\circ \approx 5 \text{ cm}$$

El volumen del prisma vale, por tanto:

$$V = \frac{12 \cdot 5}{2} \cdot 24 = 720 \text{ cm}^3$$

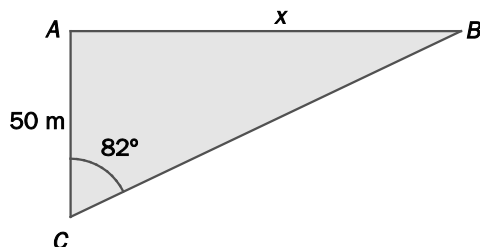
PROBLEMAS

6.114. (TIC) En el momento del día en que los rayos del sol forman un ángulo de 60° con la horizontal, la sombra que proyecta un árbol en el suelo es de 2,6 metros. ¿Cuánto mide el árbol?



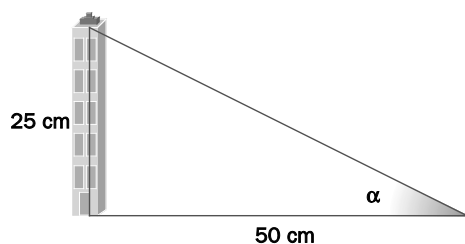
$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{2,6} \Rightarrow h = 2,6 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \approx 4,5 \text{ m}$$

6.115. (TIC) Para medir la distancia entre dos puntos muy alejados A y B , se han situado dos personas sobre ellos. Una tercera persona está situada en el punto C , a 50 metros de distancia de A y viendo A y B bajo un ángulo de 82° . Calcula la distancia entre A y B .



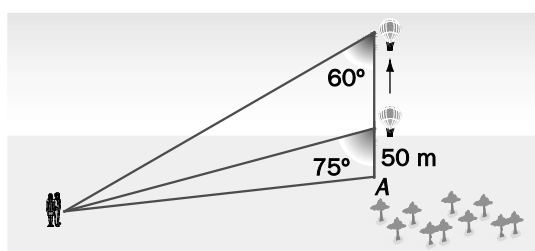
$$\operatorname{tg} 82^\circ = \frac{x}{50} \Rightarrow x = 50 \cdot \operatorname{tg} 82^\circ \approx 355,77 \text{ m}$$

- 6.116. Unas cigüeñas han construido su nido sobre el tejado de un edificio a 25 metros del suelo. Un chico lo observa desde un punto situado a 50 metros del edificio. Calcula el ángulo de observación.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{25}{50} = 0,5 \Rightarrow \alpha \approx 26,57^\circ$$

- 6.117. Juan ha subido en un globo aerostático hasta una altura de 50 metros. Sus padres siguen el vuelo desde el suelo.

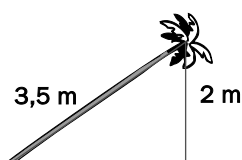


- a) ¿A qué distancia del punto A se encuentran los padres de Juan?
 b) Si el globo continúa subiendo en la misma dirección y se detiene cuando el ángulo con el que Juan observa a los padres es de 60° , ¿a qué altura se encuentra el globo en este momento?

a) Si x es la distancia solicitada, $\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{x}{50} \Rightarrow x = 50 \cdot \operatorname{tg} 75^\circ \approx 186,6 \text{ m}$

b) Si h es la distancia solicitada, $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x}{h} \Rightarrow h = \frac{x}{\operatorname{tg} 60^\circ} \approx 107,73 \text{ m}$

- 6.118. El tronco de una palmera mide 3,5 metros y crece de forma inclinada debido al peso de la parte superior. La perpendicular desde su parte más alta hasta la tierra mide 2 metros. Calcula el ángulo de inclinación del tronco respecto de la vertical.



$$\cos \alpha = \frac{2}{3,5} \approx 0,571 \Rightarrow \alpha \approx 55,18^\circ$$

- 6.119. (TIC) Alba va a poner una bombilla de bajo consumo en una lámpara que está situada a 2 metros del suelo. Alba mide 1,53 metros, y cada lado de la escalera, 70 centímetros. Los dos lados de la escalera forman un ángulo de 50° .



¿Puede Alba poner la bombilla con esta escalera?

Si h es la altura que alcanza la escalera,

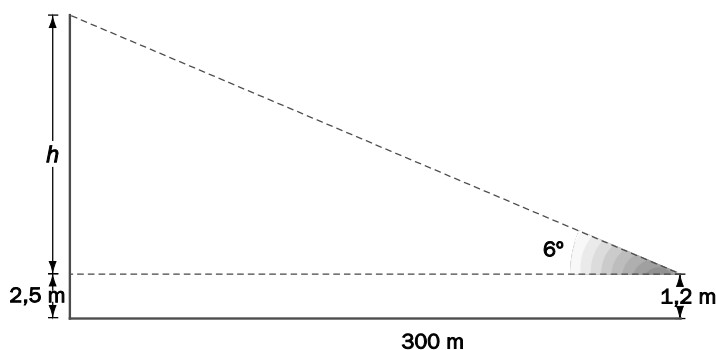
$$\cos 25^\circ = \frac{h}{70} \Rightarrow h = 70 \cdot \cos 25^\circ \approx 63,44 \text{ cm}$$

Alba puede alcanzar, por tanto, una altura de $153 + 63,44 = 216,44$ cm, suficiente para poner la bombilla.

- 6.120. (TIC) En el centro de una plaza de forma circular de 300 metros de diámetro hay una estatua sobre un pedestal que mide 2,5 metros de altura. Con un teodolito situado en el borde de la plaza se observa la parte más alta de la estatua bajo un ángulo de 6° .

Si la mira del teodolito se encuentra a 1,2 metros del suelo, ¿cuánto mide la estatua?

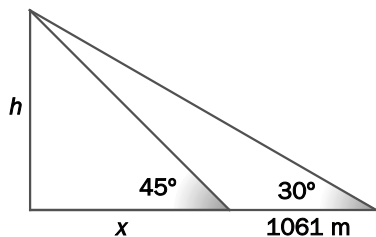
Si llamamos h a la altura de la estatua, la situación viene representada por la siguiente figura.



$$\text{Por tanto, } \operatorname{tg} 6^\circ = \frac{h + 1,3}{300} \Rightarrow h + 1,3 = 300 \cdot \operatorname{tg} 6^\circ \approx 31,53 \Rightarrow h \approx 30,23 \text{ m}$$

- 6.121. (TIC) Desde un lugar situado al pie de una montaña se observa el pico más alto con un ángulo de elevación de 45° . Si se retrocede 1061 metros, el ángulo es de 30° .

Calcula la altura de la montaña.



$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = \operatorname{tg} 45^\circ \cdot x = x$$

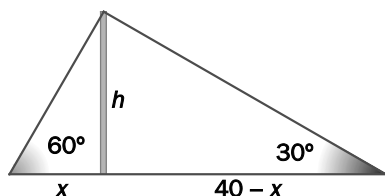
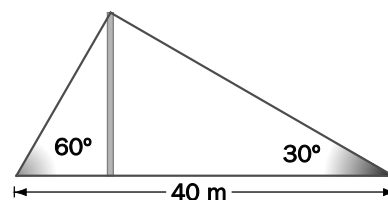
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{x + 1061} \Rightarrow h = \operatorname{tg} 30^\circ \cdot (x + 1061) = 0,5774x + 612,6214$$

$$\text{Igualando: } x = 0,5774x + 612,6214 \Rightarrow 0,4226x = 612,6214 \Rightarrow x = 1449,65 \Rightarrow h = 1449,65 \text{ m}$$

- 6.122. Se ha clavado una antena en el suelo. Para que permanezca vertical y bien sujeta se le han colocado dos anclajes en el suelo a ambos lados y alineados con su base.

La distancia entre los anclajes es de 40 metros, y si se observa la parte más alta de la antena desde cada uno de ellos, los ángulos de elevación son de 30° y 60° , respectivamente.

Halla la altura de la antena.



$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = \operatorname{tg} 60^\circ \cdot x = 1,7321x$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{40-x} \Rightarrow h = \operatorname{tg} 30^\circ \cdot (40-x) = 23,096 - 0,5774x$$

$$\text{Igualando: } 1,7321x = 23,096 - 0,5774x \Rightarrow 2,3095x = 23,096 \Rightarrow x \approx 10 \text{ m} \Rightarrow h \approx 17,32 \text{ m}$$

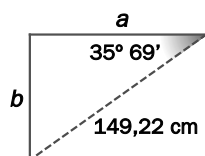
- 6.123. (TIC) Juan quiere saber si puede bajar el tablero de su mesa en el ascensor.

La diagonal del tablero mide 149,22 cm y forma un ángulo de $35,69^\circ$ con la arista mayor.

El ascensor mide $95 \times 80 \times 205$ cm.



¿Podrá Juan bajar su mesa en el ascensor?



$$\cos 35,69^\circ = \frac{a}{149,22} \Rightarrow a = 149,22 \cdot \cos 35,69^\circ \cdot x \approx 121,19 \text{ cm}$$

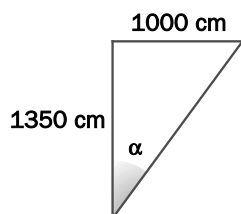
$$\operatorname{sen} 35,69^\circ = \frac{b}{149,22} \Rightarrow b = 149,22 \cdot \operatorname{sen} 35,69^\circ \cdot x \approx 87,05 \text{ cm}$$

De este modo, el tablero puede entrar en el ascensor.

- 6.124. (TIC) Se invierten 6 segundos en la observación de un avión que sobrevuela un punto de la Tierra. En este intervalo de tiempo, el avión ha cambiado ligeramente de posición.

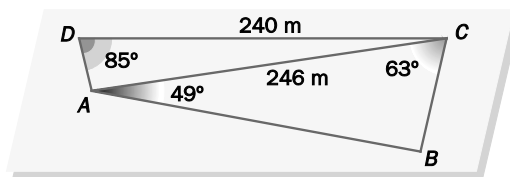
Si el avión se observa perpendicularmente a una altura de 1350 metros y lleva una velocidad de 600 kilómetros por hora, ¿qué ángulo diferencia las dos visuales del observador?

En 6 segundos, el avión recorre 1 km; por tanto,



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1000}{1350} \approx 0,741 \Rightarrow \alpha \approx 36,54^\circ$$

- 6.125. (TIC) Para conocer la distancia entre varios puntos se realiza una triangulación, esto es, se unen los puntos de modo que formen triángulos no solapados.



Calcula las distancias que faltan en el dibujo.

El ángulo $\widehat{ABC}$ vale $180^\circ - 49^\circ - 63^\circ = 68^\circ$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{BC}{\sin 49^\circ} = \frac{246}{\sin 68^\circ} \Rightarrow BC = \frac{246 \cdot \sin 49^\circ}{\sin 68^\circ} \approx 200,24 \text{ m}$$

$$\frac{AB}{\sin 63^\circ} = \frac{246}{\sin 68^\circ} \Rightarrow AB = \frac{246 \cdot \sin 63^\circ}{\sin 68^\circ} \approx 236,4 \text{ m}$$

Aplicando el teorema del seno calculamos el ángulo $\alpha = \widehat{DAC}$:

$$\frac{240}{\sin \alpha} = \frac{246}{\sin 85^\circ} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{240 \cdot \sin 85^\circ}{246} \approx 0,9719 \Rightarrow \alpha = 76,39^\circ$$

Observa que el otro posible valor de α , $180^\circ - 76,39^\circ = 103,61^\circ$, no es posible, ya que en ese caso los ángulos del triángulo ADC sumarían más de 180° .

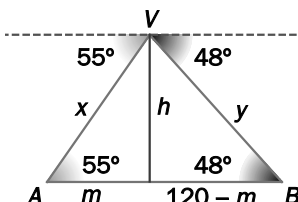
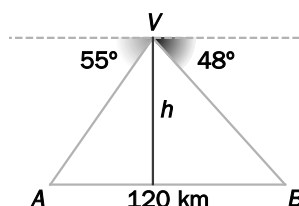
El ángulo $\widehat{DCA}$ vale $180^\circ - 85^\circ - 76,39^\circ = 18,61^\circ$

Por último, aplicando el teorema del coseno:

$$AD^2 = 240^2 + 246^2 - 2 \cdot 240 \cdot 246 \cdot \cos 18,61^\circ \approx 6210,08 \Rightarrow AD \approx 78,8 \text{ m}$$

NOTA: Hay un error en el dibujo del libro, la diagonal del cuadrilátero mide 246 m.

- 6.126. (TIC) Una avioneta está volando entre dos ciudades A y B que distan 120 km. Los ángulos de depresión desde la avioneta hasta cada una de las ciudades son de 55° y 48° , respectivamente. Calcula la altura a la que está volando la avioneta y las distancias a las que se encuentra de A y de B .



$$\operatorname{tg} 55^\circ = \frac{h}{m} \Rightarrow h = \operatorname{tg} 55^\circ \cdot m = 1,4281m$$

$$\operatorname{tg} 48^\circ = \frac{h}{120 - m} \Rightarrow h = \operatorname{tg} 48^\circ \cdot (120 - m) = 133,272 - 1,1106m$$

$$\text{Igualando: } 1,4281m = 133,272 - 1,1106m \Rightarrow 2,5387m = 133,272 \Rightarrow m \approx 52,5 \text{ m} \Rightarrow h \approx 74,98 \text{ m}$$

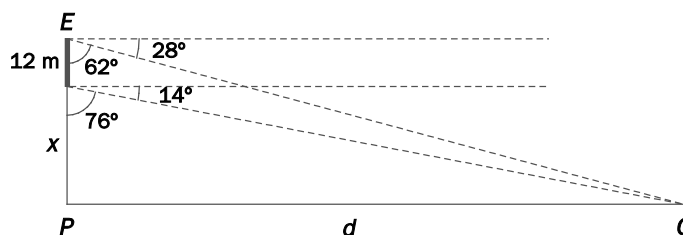
Por otro lado:

$$\sin 55^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\sin 55^\circ} \approx 91,53 \text{ m}$$

$$\sin 48^\circ = \frac{h}{y} \Rightarrow y = \frac{h}{\sin 48^\circ} \approx 100,9 \text{ m}$$

- 6.127. (TIC) Desde el punto más alto de un edificio se ve un coche aparcado con un ángulo de depresión de 28° . Al bajar a un piso del mismo edificio situado a 12 metros del anterior punto de observación, el ángulo de depresión pasa a ser de 14° .

Calcula la distancia del coche al punto más bajo del edificio y la altura del mismo.



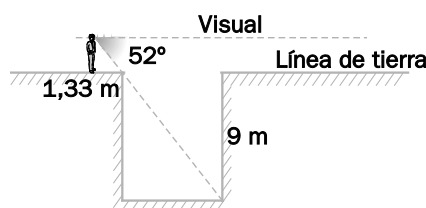
$$\operatorname{tg} 62^\circ = \frac{d}{12+x} \Rightarrow d = \operatorname{tg} 62^\circ \cdot (12+x) = 1,8807 \cdot (12+x) = 22,5684 + 1,8807x$$

$$\operatorname{tg} 76^\circ = \frac{d}{x} \Rightarrow d = \operatorname{tg} 76^\circ \cdot x = 4,0108x$$

$$\text{Igualando: } 22,5684 + 1,8807x = 4,0108x \Rightarrow 2,1301x = 22,5684 \Rightarrow x \approx 10,59 \text{ m}$$

Por tanto, la altura del edificio es $x + 12 = 22,59 \text{ m}$, y el coche está a $d = 4,0108x \approx 42,47 \text{ m}$.

- 6.128. (TIC) Una persona situada a 1,33 m del extremo de un pozo de 9 metros de hondo ve su punto más profundo y alejado con un ángulo de depresión de 52° tal y como muestra la figura. Calcula la anchura del pozo y la altura, hasta los ojos, de la persona.

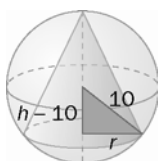
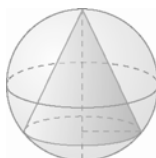


Si x es la anchura del pozo y h la altura de la persona, tenemos:

$$\operatorname{tg}(90^\circ - 52^\circ) = \operatorname{tg} 38^\circ = \frac{1,33}{h} \Rightarrow h = \frac{1,33}{\operatorname{tg} 38^\circ} \approx 1,7 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} 52^\circ = \frac{9}{x} \Rightarrow x = \frac{9}{\operatorname{tg} 52^\circ} = 7,03 \text{ m}$$

- 6.129. En una esfera de 10 cm de radio se inscribe un cono, tal y como aparece en la figura. Halla el volumen del cono si el área de su base es de 50 cm^2 .



Como $\pi r^2 = 50$, tenemos que $r = 3,99 \text{ cm}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo sombreado:

$$r^2 + (h-10)^2 = 10^2 \Rightarrow (h-10)^2 = 100 - r^2 \Rightarrow h = 10 + \sqrt{100 - r^2} \approx 19,17 \text{ cm}$$

$$\text{Por tanto, el volumen del cono vale } V = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3} = \frac{50 \cdot 19,17}{3} = 319,5 \text{ cm}^3.$$

AMPLIACIÓN

6.130. ¿Cuál es la suma de todas las soluciones entre 0 y 360° de la ecuación $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$?

- a) $\frac{\pi}{2}$ b) π c) $\frac{3\pi}{2}$ d) 2π

Haciendo el cambio de variable $z = \operatorname{tg} x$, la ecuación se transforma en $z^2 - 2z + 1 = 0$, cuya única solución es $z = 1$. Por tanto, $\operatorname{tg} x = 1$, que tiene como soluciones entre 0 y 2π , $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

De este modo, la suma de las soluciones es $\frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, la respuesta c.

6.131. ¿Cuántos triángulos de área 10 tienen por vértices los puntos $(5 \cos \alpha, 5 \sin \alpha)$, $(-5, 0)$ y $(5, 0)$?

- a) 0 b) 2 c) 4 d) 6

Tomando como base el segmento de extremos $(-5, 0)$ y $(5, 0)$, su longitud es 10, por lo que para que el área sea 10, la altura debe ser 2. Es decir, la ordenada del tercer vértice debe ser 2 o -2 . Así pues, $\sin \alpha = \pm \frac{2}{5}$, y hay cuatro valores de α en $[0, 2\pi)$ que lo cumplen, la respuesta c.

6.132. En el cuadrilátero $ABCD$, el ángulo $\widehat{A}$ es de 120° ; los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$ son ángulos rectos, $AB = 13$ y $AD = 46$. La longitud AC es:

- a) 60 b) 62 c) 64 d) 65

La situación es como indica la figura. Observemos que $\widehat{C} = 60^\circ$ y $AC^2 = DC^2 + 46^2$.

Para obtener DC , trazamos por D una paralela a AB , por lo que el ángulo $\widehat{ADE} = 60^\circ$, siendo, entonces, $DF = 46 \cdot \cos 60^\circ = 23$. De este modo, $DE = 23 + 13 = 36$ y

$$DC = \frac{36}{\cos 30^\circ} = \frac{72}{\sqrt{3}} = \frac{72\sqrt{3}}{3} = 24\sqrt{3}.$$

Por tanto, $AC^2 = DC^2 + 46^2 = 1728 + 2116 = 3844$, resultando entonces $AC = 62$, la respuesta b.

6.133. Si $\frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha = 2$, $\frac{1}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha$ es igual a:

- a) 0,1 b) 0,2 c) 0,3 d) 0,5

Nos dicen que $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$ y nos piden $\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Como $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1$, se sigue que $\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}$, la respuesta d.

6.134. Sea $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ con $x \neq 0$ y $x \neq 1$, y sea α un ángulo que cumple $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Entonces $\frac{1}{x}$ es:

- a) $\sin^2 \alpha$ b) $\cos^2 \alpha$ c) $\operatorname{tg}^2 \alpha$ d) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$

Como $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, se sigue que $1 - \frac{1}{x} = \cos^2 \alpha$, por lo que $\frac{1}{x} = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$, la respuesta a.

AUTOEVALUACIÓN

6.1. Expresa estos ángulos en grados.

a) $\frac{3\pi}{5}$ rad

b) $\frac{15\pi}{4}$ rad

c) 9π rad

Multiplicando en cada caso por $\frac{180}{\pi}$, obtenemos:

a) 108°

b) 675°

c) 1620°

6.2. Pasa a radianes los siguientes ángulos.

a) 36°

b) 100°

c) 310°

Multiplicando en cada caso por $\frac{\pi}{180}$, obtenemos:

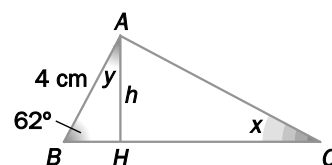
a) $\frac{\pi}{5}$ rad

b) $\frac{5\pi}{9}$ rad

c) $\frac{31\pi}{18}$ rad

6.3. El triángulo de la figura es rectángulo en A.

a) Calcula la medida del cateto desconocido y de la hipotenusa.

b) Calcula la medida de la altura h .c) Calcula las amplitudes de los ángulos x e y .

a) $\operatorname{tg} 62^\circ = \frac{b}{4} \Rightarrow b = 4 \cdot \operatorname{tg} 62^\circ \approx 7,52$ cm

$$\cos 62^\circ = \frac{4}{a} \Rightarrow a = \frac{4}{\cos 62^\circ} \approx 8,52$$
 cm

b) $\sin 62^\circ = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 4 \cdot \sin 62^\circ \approx 3,53$ cm

c) $x = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$ $y = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$

6.4. Halla las otras dos razones trigonométricas en cada caso.

a) $\sin \alpha = 0,3$; $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

b) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{24}$; $0 \text{ rad} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

c) $\cos \alpha = 0,125$; $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

d) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$; $\pi \text{ rad} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$

a) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno es positivo, y el coseno y la tangente, negativos.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - 0,3^2} = -0,954$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,3}{-0,954} = -0,314$$