

6 Trigonometría

ACTIVIDADES INICIALES

- 6.I. Los marineros musulmanes utilizaban el astrolabio para determinar la dirección hacia la que debían rezar. ¿Cuál es esa dirección? ¿A qué se debe?

Cada musulmán debe rezar cinco veces al día en dirección a La Meca, ciudad santa del islam, situada en Arabia Saudita. Es la ciudad natal de Mahoma.

- 6.II. ¿Por qué el sextante y el octante se llaman así? ¿Cómo aparecen los números 6 y 8 en su diseño?

El sextante es un instrumento que permite medir ángulos entre dos objetos tales como dos puntos de una costa o un astro, tradicionalmente el Sol, y el horizonte. El nombre *sextante* proviene de la escala del instrumento, que abarca un ángulo de 60° , es decir, un sexto de un círculo completo.

El octante es un instrumento de reflexión inventado para observar la altura de los astros sobre el horizonte del mar. El arco del octante consta de 45° o una octava parte del círculo, de donde proviene su denominación.

- 6.III. ¿Qué significan las siglas GPS? ¿Cuántos satélites necesita un GPS para localizarte, y por qué?

GPS son las siglas de los términos *Global Positioning System*, Sistema de Posicionamiento Global en español.

Cada satélite indica que el receptor se encuentra en un punto en la superficie de la esfera, con centro en el propio satélite y de radio la distancia total hasta el receptor. Obteniendo información de dos satélites sabríamos que el receptor se encuentra sobre la circunferencia que resulta cuando se intersecan las dos esferas. Si adquirimos la misma información de un tercer satélite, notamos que la nueva esfera solo corta la circunferencia anterior en dos puntos. Uno de ellos se puede descartar porque ofrece una posición absurda. De esta manera ya tendríamos la posición en 3D.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- 6.1. Actividad resuelta.

- 6.2. (TIC) Pasa a radianes los siguientes ángulos expresados en grados sexagesimales.

a) 60°

d) 135°

b) 120°

e) 330°

c) 210°

a) $60^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

d) $135^\circ = 135 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$

b) $120^\circ = 120 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$

e) $330^\circ = 330 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$

c) $210^\circ = 210 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$

6.3. (TIC) Convierte a grados sexagesimales los siguientes ángulos expresados en radianes.

a) $\frac{\pi}{5}$

d) 4π

b) $\frac{3\pi}{7}$

e) $\frac{11\pi}{6}$

c) $\frac{7\pi}{3}$

a) $\frac{\pi}{5} \text{ rad} = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} = 36^\circ$

b) $\frac{3\pi}{7} \text{ rad} = \frac{3\pi}{7} \cdot \frac{180}{\pi} = 77^\circ 8' 34''$

c) $\frac{7\pi}{3} \text{ rad} = \frac{7\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 420^\circ$

d) $4\pi \text{ rad} = 4\pi \cdot \frac{180}{\pi} = 720^\circ$

e) $\frac{11\pi}{6} \text{ rad} = \frac{11\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 330^\circ$

6.4. (TIC) Las medidas de dos de los ángulos de un triángulo ABC son $\hat{A} = 40^\circ$ y $\hat{B} = 1,54 \text{ rad}$. Calcula en grados y en radianes la medida de $\hat{C}$.

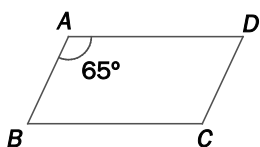
$$\hat{B} = 1,54 \cdot \frac{180}{\pi} = 88^\circ 14' 8''$$

Como la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es 180° , tenemos:

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 51^\circ 45' 52'' \approx 0,903 \text{ rad}$$

6.5. (TIC) La medida de un ángulo de un paralelogramo es $\hat{A} = 65^\circ$. Halla los otros tres ángulos en radianes.

Los ángulos de un paralelogramo son iguales dos a dos y la suma de dos contiguos es siempre de 180° . Por tanto:



$$\hat{A} = \hat{C} = 65^\circ = 65 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{13\pi}{36} \text{ rad}$$

$$\hat{B} = \hat{D} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ = 115 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{23\pi}{36} \text{ rad}$$

6.6. Actividad interactiva.

6.7. Actividad resuelta.

6.8. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos en los siguientes triángulos rectángulos.

a) Cateto $b = 28$ cm, cateto $c = 45$ cm

b) Hipotenusa $a = 73$ cm, cateto $b = 48$ cm

c) Hipotenusa $a = 15$ cm, cateto $c = 12$ cm

a) $a = \sqrt{28^2 + 45^2} = 53$ cm

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{28}{53} \quad \cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{45}{53} \quad \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{28}{45}$$

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{45}{53} \quad \cos \hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{28}{53} \quad \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{45}{28}$$

b) $c = \sqrt{73^2 - 48^2} = 55$ cm

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{48}{73} \quad \cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{55}{73} \quad \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{48}{55}$$

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{55}{73} \quad \cos \hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{48}{73} \quad \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{55}{48}$$

c) $b = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{9}{15} \quad \cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{12}{15} \quad \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{9}{12}$$

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{12}{15} \quad \cos \hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{9}{15} \quad \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{9}$$

6.9. (TIC) Copia y completa la siguiente tabla.

Ángulo	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad
Seno	•	•	•
Coseno	•	•	•
Tangente	•	•	•

$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ$$

Ángulo	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

6.10. Actividad resuelta.

6.11. Actividad resuelta.

6.12. Actividad resuelta.

6.13. (TIC) Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo si su tangente vale 0,75.

Gracias a la tercera relación fundamental:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + 0,75^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + 0,75^2} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1,5625}} = \sqrt{0,64} = 0,8$$

Gracias a la segunda relación fundamental:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = 0,75 \cdot 0,8 = 0,6$$

6.14. (TIC) Calcula el seno y la tangente de un ángulo agudo si su coseno vale 0,554.

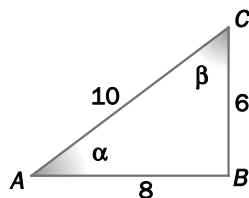
Gracias a la primera relación fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + 0,554^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - 0,554^2} \approx 0,833$$

Gracias a la segunda relación fundamental:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,833}{0,554} \approx 1,504$$

6.15. Calcula el seno, el coseno y la tangente de los dos ángulos agudos del triángulo aplicando solo la definición del seno.



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = 0,8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = 0,75$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \beta} = 0,6$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} \approx 1,33$$

6.16. Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas a partir de las relaciones fundamentales.

$$\text{a) } \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \alpha \qquad \text{b) } \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 2\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 + 2\cos^2 \alpha$$

$$\text{a) } \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\text{b) } \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 2\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 + \frac{2\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 + \frac{2\operatorname{sen}^2 \alpha}{\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2\cos^2 \alpha$$

6.17. Demuestra estas igualdades trigonométricas utilizando las relaciones fundamentales.

$$a) \quad \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$b) \quad \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha + \left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2$$

$$c) \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$d) \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$e) \quad \cos^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$$

$$a) \quad \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$b) \quad \cos^2 \alpha + \left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 = \cos^2 \alpha \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = \cos^2 \alpha \left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = \cos^2 \alpha \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$c) \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$d) \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$e) \quad \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = \cos^2 \alpha \cdot (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha$$

6.18. Demuestra esta igualdad trigonométrica.

$$\frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}}{1 + 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$\frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}}{1 + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{2 \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}}{1 + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot (1 + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)} = \frac{1 + 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot (1 + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

6.19. ¿Cuándo es cierto que $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$?

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha$$

Por tanto, la igualdad será cierta cuando el seno y la tangente del ángulo α sean iguales en valor absoluto.

6.20. Actividad resuelta.

6.21. Actividad resuelta.

6.22. Expresa los siguientes ángulos como la suma de un número de vueltas completas más un ángulo menor de 360° .

a) 2350°

b) 4315°

c) 400°

a) $2350^\circ = 6 \cdot 360^\circ + 190^\circ$

b) $4315^\circ = 11 \cdot 360^\circ + 355^\circ$

c) $400^\circ = 360^\circ + 40^\circ$

6.23. Expresa las razones trigonométricas de 70° , 160° , 200° y 340° en función de las de 20° .

Como $70^\circ = 90^\circ - 20^\circ \Rightarrow \sin 70^\circ = \cos 20^\circ \quad \cos 70^\circ = \sin 20^\circ \quad \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 20^\circ}$

Como $160^\circ = 180^\circ - 20^\circ \Rightarrow \sin 160^\circ = \sin 20^\circ \quad \cos 160^\circ = -\cos 20^\circ \quad \operatorname{tg} 160^\circ = -\operatorname{tg} 20^\circ$

Como $200^\circ = 180^\circ + 20^\circ \Rightarrow \sin 200^\circ = -\sin 20^\circ \quad \cos 200^\circ = -\cos 20^\circ \quad \operatorname{tg} 200^\circ = \operatorname{tg} 20^\circ$

Como $340^\circ = 360^\circ - 20^\circ \Rightarrow \sin 340^\circ = -\sin 20^\circ \quad \cos 340^\circ = \cos 20^\circ \quad \operatorname{tg} 340^\circ = -\operatorname{tg} 20^\circ$

6.24. Si $\cos \alpha = \frac{28}{53}$ y $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, halla $\sin \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.

Al ser un ángulo del cuarto cuadrante, el seno y la tangente son negativos y el coseno es positivo.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{28}{53}\right)^2} = -\sqrt{\frac{2025}{2809}} = -\frac{45}{53}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{45}{53}}{\frac{28}{53}} = -\frac{45}{28}$$

6.25. Si $\operatorname{tg} \alpha = \frac{77}{36}$ y $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, halla $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$.

Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente es positiva y el seno y el coseno son negativos.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{77}{36}\right)^2}} = -\sqrt{\frac{1}{\frac{7225}{1296}}} = -\sqrt{\frac{1296}{7225}} = -\frac{36}{85}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = -\frac{36}{85} \cdot \frac{77}{36} = -\frac{77}{85}$$

6.26. Halla las razones trigonométricas de 150° y -150° .

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \operatorname{tg} 150^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin (-150^\circ) = -\sin 150^\circ = -\frac{1}{2} \quad \cos (-150^\circ) = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \operatorname{tg} (-150^\circ) = -\operatorname{tg} 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

6.27. Halla las razones trigonométricas de 225° y -225° .

$$\operatorname{sen} 225^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

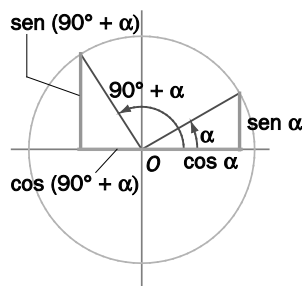
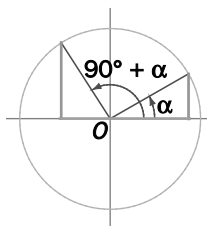
$$\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\operatorname{sen} (-225^\circ) = -\operatorname{sen} 225^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos (-225^\circ) = \cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} (-225^\circ) = -\operatorname{tg} 225^\circ = -1$$

6.28. Con ayuda de la figura, indica las relaciones que se dan entre las razones trigonométricas de los ángulos α y $90^\circ + \alpha$.



En la figura se observan dos triángulos rectángulos iguales, ya que tienen la hipotenusa igual a la unidad y dos ángulos iguales.

Por tanto:

$$\operatorname{sen} (90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos (90^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tg} (90^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{sen} (90^\circ + \alpha)}{\cos (90^\circ + \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\operatorname{sen} \alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

6.29. Actividad interactiva.

6.30. Actividad resuelta.

6.31. (TIC) Con ayuda de la calculadora, halla:

a) $\operatorname{sen} 43^\circ$

b) $\cos 33^\circ$

c) $\operatorname{tg} 2,5 \text{ rad}$

d) $\operatorname{sen} 1 \text{ rad}$

a) $\operatorname{sen} 43^\circ = 0,682$

b) $\cos 33^\circ = 0,839$

c) $\operatorname{tg} 2,5 \text{ rad} = -0,747$

d) $\operatorname{sen} 1 \text{ rad} = 0,841$

e) $\operatorname{arcsen} 0,16$

f) $\operatorname{arccos} 0,99$

g) $\operatorname{arctg} 0,25$

h) $\operatorname{arcsen} 1$

e) $\operatorname{arcsen} 0,16 = 9^\circ 12' 25''$

f) $\operatorname{arccos} 0,99 = 8^\circ 6' 35''$

g) $\operatorname{arctg} 0,25 = 14^\circ 2' 10''$

h) $\operatorname{arcsen} 1 = 90^\circ$

6.32. Resuelve estas ecuaciones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen} x = 1$

d) $\operatorname{tg} x = 0$

b) $\cos x = -1$

e) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

c) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $2 \operatorname{sen}(2x - 180^\circ) = -1$

a) $\operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ \cdot k$ donde $k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = -1 \Rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$ donde $k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$ donde $k \in \mathbb{Z}$

d) $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$ donde $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 180^\circ \cdot k$ donde $k \in \mathbb{Z}$

e) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$ donde $k \in \mathbb{Z}$

$$f) \quad 2 \operatorname{sen}(2x - 180^\circ) = -1 \Rightarrow \operatorname{sen}(2x - 180^\circ) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 180^\circ = 210^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x - 180^\circ = 330^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \text{ donde } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 195^\circ + 180^\circ \cdot k \\ x = 255^\circ + 180^\circ \cdot k \end{cases} \text{ donde } k \in \mathbb{Z}$$

6.33. Actividad resuelta.

6.34. (TIC) Resuelve estos triángulos rectángulos.

a) $\hat{A} = 90^\circ, \hat{C} = 43^\circ, a = 5 \text{ cm}$

b) $\hat{B} = 90^\circ, a = 8 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm}$

a) $\hat{A} = 90^\circ, \hat{C} = 43^\circ, a = 5 \text{ cm}$

$$\hat{B} = 180^\circ - 90^\circ - 43^\circ = 47^\circ$$

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 5 \cdot \operatorname{sen} 43^\circ \approx 3,41 \text{ cm}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = 5 \cdot \cos 43^\circ \approx 3,66 \text{ cm}$$

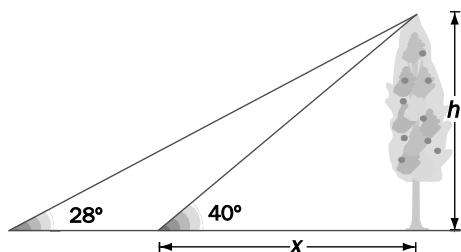
b) $\hat{B} = 90^\circ, a = 8 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm}$

$$b = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{c} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow \hat{A} = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \approx 53^\circ 8'$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 90^\circ - \hat{A} = 36^\circ 52'$$

- 6.35. Desde la orilla de un río se ve un árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 40° , y si se retrocede 4 metros, se ve bajo un ángulo de 28° . Calcula la altura del árbol y la anchura del río.



Sea h la altura del árbol y x la anchura del río.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 40^\circ &= \frac{h}{x} \Rightarrow h = \operatorname{tg} 40^\circ \cdot x = 0,839 x \\ \operatorname{tg} 28^\circ &= \frac{h}{4+x} \Rightarrow h = \operatorname{tg} 28^\circ \cdot (4+x) = 0,532 \cdot (4+x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,839x = 0,532 \cdot (4+x) \Rightarrow 0,839x = 2,128 + 0,532x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,307x = 2,128 \Rightarrow x = \frac{2,128}{0,307} = 6,93 \text{ m} \Rightarrow h = 5,81 \text{ m}$$

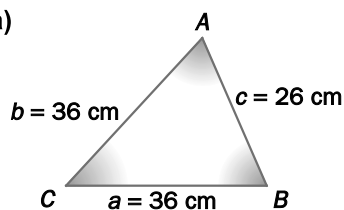
- 6.36. Actividad resuelta.

- 6.37. Actividad resuelta.

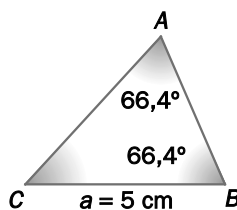
- 6.38. Actividad resuelta.

- 6.39. (TIC) Resuelve los siguientes triángulos.

a)



b)



- a) Aplicando el teorema del coseno:

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \approx 0,7392 \Rightarrow \hat{C} = 42^\circ 20' 12''$$

Al ser un triángulo isósceles:

$$\hat{A} = \hat{B} = (180^\circ - 42^\circ 20' 12'') : 2 = 68^\circ 49' 54''$$

- b) Al ser un triángulo isósceles:

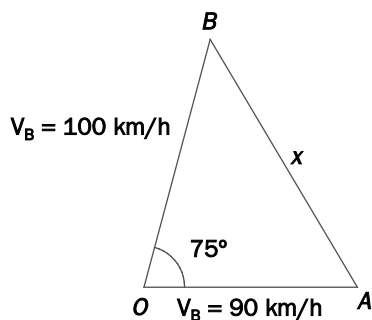
$$\hat{C} = 180^\circ - 2 \cdot 66,4^\circ = 47,2^\circ$$

$$b = 5 \text{ cm}$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \hat{C}}{\operatorname{sen} \hat{A}} \approx 4 \text{ cm}$$

- 6.40. (TIC) Dos coches con velocidades constantes respectivas de 90 y 100 kilómetros por hora toman dos carreteras que se bifurcan con un ángulo de 75° . ¿Qué distancia habrá entre ellos cuando lleven 10 minutos de viaje?



El coche A recorre $90 \cdot 1/6 = 15$ km.

El coche B recorre $100 \cdot 1/6 \approx 16,67$ km.

Aplicando el teorema del coseno:

$$x^2 = 15^2 + 16,67^2 - 2 \cdot 15 \cdot 16,67 \cdot \cos 75^\circ \approx 373,45 \Rightarrow x \approx 19,32 \text{ km}$$

- 6.41. (TIC) Calcula el área de un recinto triangular sabiendo que dos de sus lados miden 100 y 120 metros y que forman un ángulo de 60° .

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \hat{C} = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 120 \cdot \sin 60^\circ \approx 5196,15 \text{ m}^2$$

- 6.42. (TIC) Un compás tiene dos patas de 10 centímetros de largo. ¿Qué ángulo forman sus patas si al abrirlo traza una circunferencia de diámetro 10 centímetros?

Aplicando el teorema del coseno:

$$\cos \alpha = \frac{10^2 + 10^2 - 5^2}{2 \cdot 10 \cdot 10} = 0,875 \Rightarrow \alpha \approx 28^\circ 57' 18''$$

- 6.43. (TIC) Resuelve el triángulo $a = 38$ cm, $b = 30$ cm, $\hat{B} = 38^\circ$. ¡Ten cuidado, hay dos soluciones!

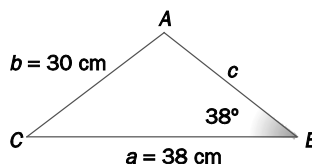
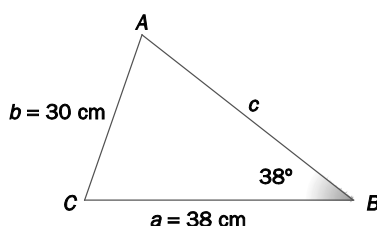
Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{a \cdot \sin \hat{B}}{b} \approx 0,7798 \Rightarrow \hat{A} = \arcsen 0,7798$$

En este caso hay dos soluciones posibles:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} \approx 51^\circ 14' 32'' \Rightarrow \hat{C} \approx 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 90^\circ 45' 28'' \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} \approx 48,73 \text{ cm} \\ \hat{A} \approx 128^\circ 45' 28'' \Rightarrow \hat{C} \approx 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 13^\circ 14' 32'' \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} \approx 11,16 \text{ cm} \end{array} \right.$$

Las dos soluciones se corresponden con las siguientes figuras:



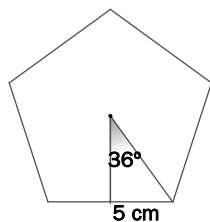
6.44. Halla el área del triángulo de lados 3, 4 y 6 cm.

Aplicando el teorema del coseno:

$$\cos \alpha = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -0,4583 \Rightarrow \alpha \approx 117^\circ 16' 39''$$

$$\text{El área será, por tanto: } S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 117^\circ 16' 39'' \approx 5,33 \text{ cm}^2.$$

6.45. (TIC) Calcula el perímetro y el área de un pentágono regular de 10 cm de lado.



$$\text{La apotema vale } a_p = \frac{5}{\tan 36^\circ} \approx 6,88 \text{ cm}.$$

$$\text{El área vale } S = \frac{50 \cdot 6,88}{2} = 172 \text{ cm}^2.$$

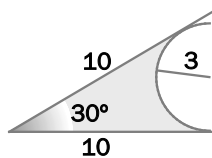
6.46. (TIC) Halla el lado y el área de un eneágono regular de perímetro 63 cm.

$$\text{El lado vale } \frac{63}{9} = 7 \text{ cm; por tanto, la apotema vale } a_p = \frac{3,5}{\tan 20^\circ} \approx 9,62 \text{ cm}.$$

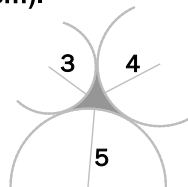
$$\text{El área vale } S = \frac{63 \cdot 9,62}{2} = 303,03 \text{ cm}^2.$$

6.47. (TIC) Halla el área de estas figuras (medidas en cm).

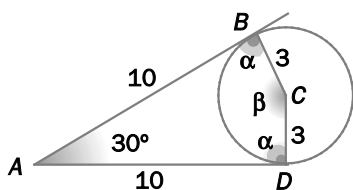
a)



b)



a) Observemos la figura.



El área solicitada es la diferencia entre el área del triángulo ABD y el área de la intersección de este triángulo con el sector circular determinado por B , C y D .

Aplicando el teorema del seno calculamos el ángulo β :

$$\frac{3}{\sin 15^\circ} = \frac{10}{\sin \frac{\beta}{2}} \Rightarrow \sin \frac{\beta}{2} = \frac{10 \cdot \sin 15^\circ}{3} \approx 0,8627 \Rightarrow \frac{\beta}{2} \approx 59^\circ 37' 28'' \Rightarrow \beta \approx 119^\circ 14' 56''$$

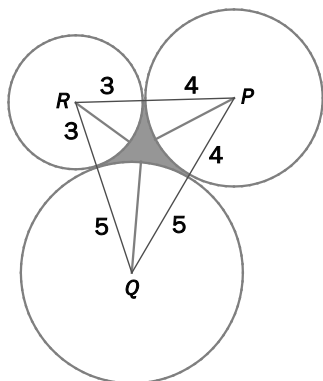
$$\text{Área del triángulo } ABD: S_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 25 \text{ cm}^2$$

Área de la intersección del triángulo ABD con el sector circular determinado por B , C y D :

$$S_2 = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot \beta}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin \beta \approx 5,44 \text{ cm}^2$$

$$\text{Por tanto, el área solicitada es } S = S_1 - S_2 = 19,56 \text{ cm}^2.$$

- b) El área solicitada es el área del triángulo PQR menos la suma de las áreas de los tres sectores circulares de la figura.



Aplicando el teorema del coseno:

$$\cos P = \frac{7^2 + 9^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 9} \approx 0,524 \Rightarrow P \approx 58^\circ 23' 57''$$

$$\cos Q = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} \approx 0,667 \Rightarrow Q \approx 48^\circ 9' 51''$$

$$\cos R = \frac{7^2 + 8^2 - 9^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} \approx 0,286 \Rightarrow R \approx 73^\circ 22' 53''$$

$$\text{Área del triángulo } PQR: S_1 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot \sin Q \approx 26,82 \text{ cm}^2$$

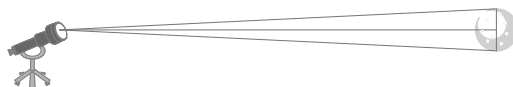
Áreas de los sectores:

$$S_P \approx \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 58,4}{360} \approx 8,15 \text{ cm}^2 \quad S_Q \approx \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 48,16}{360} \approx 10,51 \text{ cm}^2 \quad S_R \approx \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 73,38}{360} \approx 5,76 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área solicitada: } S = S_1 - (S_P + S_Q + S_R) \approx 2,4 \text{ cm}^2$$

6.48. Actividad resuelta.

- 6.49. (TIC) La Luna tiene una superficie de 38 millones de kilómetros cuadrados y se encuentra a 380 000 kilómetros de la Tierra. ¿Qué ángulo ocupa en el cielo?

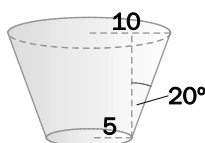


$$\text{Radio de la Luna: } 4\pi R^2 = 38 \cdot 10^6 \text{ km}^2 \Rightarrow R \approx 1739 \text{ km}$$

De este modo, el ángulo bajo el que se ve el diámetro lunar es:

$$\cos \alpha = \frac{380000^2 + 380000^2 - 3478^2}{2 \cdot 380000 \cdot 380000} \approx 0,999958 \Rightarrow \alpha \approx 31' 30''$$

- 6.50. (TIC) Halla el área lateral del tronco de cono de la figura.



$$\text{Arista lateral del tronco de cono: } a = \frac{5}{\sin 20^\circ} \approx 14,62$$

$$\text{Área lateral: } A_L = \pi \cdot (10 + 5) \cdot 14,62 \approx 688,6 \text{ unidades cuadradas}$$

- 6.51. (TIC) Halla el área de un tetraedro de lado 5 cm.

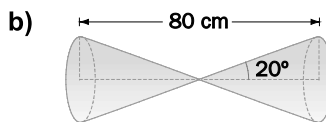
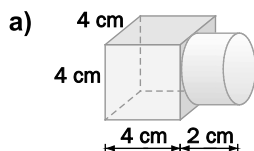
El área es la suma de cuatro triángulos equiláteros de lado 5 cm, es decir:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 43,3 \text{ cm}^2$$

6.52. Actividad interactiva.

6.53. Actividad resuelta.

6.54. (TIC) Calcula el volumen de los siguientes cuerpos.



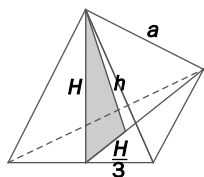
- a) El volumen total es la suma de los volúmenes de un cubo de arista 4 cm y de un cilindro de radio de la base 2 cm y de altura 2 cm.

$$\text{Por tanto, } V = 4^3 + \pi \cdot 2^2 \cdot 2 \approx 89,13 \text{ cm}^3$$

- b) El volumen total es la suma de los volúmenes de dos conos de altura 40 cm y radio de la base $40 \cdot \tan 20^\circ \approx 14,56$ cm.

$$\text{Por tanto, } V = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 14,56^2 \cdot 40}{3} \approx 17750,93 \text{ cm}^3$$

6.55. (TIC) Halla el volumen de un tetraedro de lado 7 centímetros.



La altura H de cada una de las caras es, según el teorema de Pitágoras,

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo sombreado, la altura del tetraedro es:

$$h = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \sqrt{\frac{24a^2}{36}} = \frac{2a\sqrt{6}}{6} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

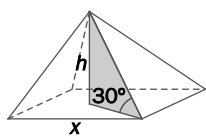
Por tanto, el volumen de un tetraedro de arista a es:

$$V = \frac{A_{\text{base}} \times \text{altura}}{3} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{36} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

En nuestro caso, $a = 7$, con lo que el volumen es $V = \frac{343\sqrt{2}}{12} \approx 40,42 \text{ cm}^3$.

6.56. (TIC) El volumen de una pirámide es de 1000 m^3 , su base es un cuadrado y el ángulo que forman las aristas laterales con la base es de 30° . ¿Cuál es su altura?

Observemos la figura, si x es el lado del cuadrado, la diagonal es $x\sqrt{2}$



$$h = \frac{x\sqrt{2}}{2} \cdot \tan 30^\circ = \frac{x\sqrt{6}}{6}$$

$$V = \frac{x^2 \cdot \frac{x\sqrt{6}}{6}}{3} = \frac{x^3\sqrt{6}}{18} = 1000 \Rightarrow x^3 = \frac{18000}{\sqrt{6}} \Rightarrow x \approx 19,44 \text{ m} \Rightarrow h \approx 7,93 \text{ m}$$

6.57. Actividad interactiva.

EJERCICIOS

Medidas de ángulos

6.58. Expresa en radianes la medida de los siguientes ángulos.

a) 30°

c) 240°

e) 90°

b) 270°

d) 135°

f) 300°

a) $30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

d) $135^\circ = 135 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$

b) $270^\circ = 270 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$

e) $90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

c) $240^\circ = 240 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$

f) $300^\circ = 300 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$

6.59. Expresa en grados sexagesimales la medida de los siguientes ángulos dados en radianes.

a) 5π

c) $\frac{5\pi}{6}$

e) $\frac{7\pi}{4}$

b) $\frac{\pi}{8}$

d) $\frac{4\pi}{3}$

f) $\frac{7\pi}{11}$

a) $5\pi \text{ rad} = 5\pi \cdot \frac{180}{\pi} = 900^\circ$

d) $\frac{4\pi}{3} \text{ rad} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 240^\circ$

b) $\frac{\pi}{8} \text{ rad} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{180}{\pi} = 22^\circ 30'$

e) $\frac{7\pi}{4} \text{ rad} = \frac{7\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 315^\circ$

c) $\frac{5\pi}{6} \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 150^\circ$

f) $\frac{7\pi}{11} \text{ rad} = \frac{7\pi}{11} \cdot \frac{180}{\pi} = 114^\circ 32' 44''$

6.60. Halla el ángulo del intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$ que corresponde a:

a) 450°

c) 720°

e) 1300°

b) 1800°

d) 540°

f) 900°

a) $450^\circ = 1 \cdot 360^\circ + 90^\circ \Rightarrow 90^\circ$

d) $540^\circ = 1 \cdot 360^\circ + 180^\circ \Rightarrow 180^\circ$

b) $1800^\circ = 5 \cdot 360^\circ \Rightarrow 0^\circ$

e) $1300^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 220^\circ \Rightarrow 220^\circ$

c) $720^\circ = 2 \cdot 360^\circ \Rightarrow 0^\circ$

f) $900^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 180^\circ \Rightarrow 180^\circ$

6.61. (TIC) Expresa en radianes el ángulo α , menor que 360° , al que equivalen los ángulos:

a) 480°

b) 1235°

c) 930°

d) 1440°

a) $480^\circ = 1 \cdot 360^\circ + 120^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$

b) $1235^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 155^\circ \Rightarrow \alpha = 155^\circ = \frac{31\pi}{36} \text{ rad}$

c) $930^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 210^\circ \Rightarrow \alpha = 210^\circ = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$

d) $1440^\circ = 4 \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 0^\circ = 0 \text{ rad}$

6.62. Expresa los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor de 2π radianes.

a) $\frac{19\pi}{4}$

d) 41π

b) $\frac{22\pi}{3}$

e) $\frac{17\pi}{6}$

c) $\frac{11\pi}{2}$

a) $\frac{19\pi}{4} = 2 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2 \text{ vueltas}$

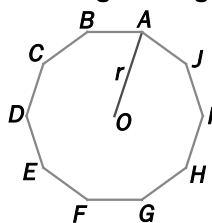
d) $41\pi = 20 \cdot 2\pi + \pi = \pi + 20 \text{ vueltas}$

b) $\frac{22\pi}{3} = 3 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 3 \text{ vueltas}$

e) $\frac{17\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 1 \text{ vuelta}$

c) $\frac{11\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2 \text{ vueltas}$

6.63. En la figura aparece representado un decágono regular.



- a) ¿Qué ángulo hay que recorrer para llevar el radio r desde su posición inicial A hasta el vértice B en el sentido contrario a las agujas del reloj?
- b) ¿Qué ángulo se recorre para llevar r desde I hasta D en el sentido de las agujas del reloj?
- c) ¿A qué punto llegará r si se encuentra inicialmente en B y se le aplica un movimiento de 108° ?
- d) ¿A qué punto llegará r si se encuentra inicialmente en G y se le aplica un movimiento de -144° ?

a) El ángulo que se deberá aplicar es: $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.

b) Se recorre un ángulo negativo: $-36^\circ \cdot 5 = -180^\circ$.

c) Como $108^\circ = 3 \cdot 36^\circ$, se recorren tres posiciones en sentido directo y, por tanto, el radio se colocará en la letra E .

d) Como $144^\circ = 4 \cdot 36^\circ$, se recorren cuatro posiciones en el sentido inverso y, por tanto, el radio se colocará en la letra C .

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

6.64. La hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo miden 10, 8 y 6 decímetros, respectivamente. ¿Cuáles son las razones trigonométricas de su ángulo agudo de menor amplitud?

El ángulo agudo de menor amplitud, llamémosle α , es el opuesto al cateto de 6 dm, por tanto:

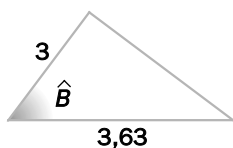
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{8}{10} = 0,8$$

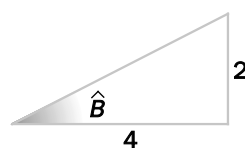
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{8} = 0,75$$

6.65. (TIC) Calcula las medidas de los ángulos indicados en los siguientes triángulos rectángulos. Da los resultados aproximando a los minutos.

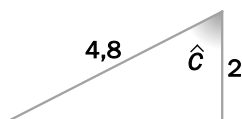
a)



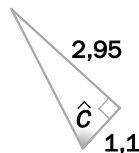
c)



b)



d)



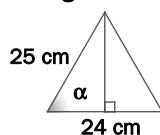
$$a) \quad \cos \hat{B} = \frac{3}{3,63} \approx 0,8264 \Rightarrow \hat{B} \approx 34^\circ 16'$$

$$b) \quad \cos \hat{C} = \frac{2}{4,8} \approx 0,4167 \Rightarrow \hat{C} \approx 65^\circ 22'$$

$$c) \quad \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{2}{4} = 0,5 \Rightarrow \hat{B} \approx 26^\circ 34'$$

$$d) \quad \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{2,95}{1,1} \approx 2,6818 \Rightarrow \hat{C} \approx 69^\circ 33'$$

6.66. Calcula las razones trigonométricas del ángulo α .



Usando el teorema de Pitágoras, la altura del triángulo vale $h = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{481} \approx 21,93$ cm.

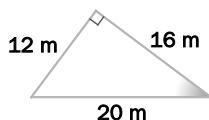
De este modo:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{21,93}{25} = 0,8772$$

$$\cos \alpha = \frac{24}{25} = 0,96$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{21,93}{24} = 0,91375$$

6.67. Halla la medida de los ángulos del triángulo.



Llamando α al ángulo sombreado de la figura tenemos $\operatorname{sen} \alpha = \frac{12}{20} = 0,6 \Rightarrow \alpha \approx 36^\circ 52' 12''$.

El ángulo recto mide 90° , y como los tres ángulos suman 180° , el tercer ángulo mide $53^\circ 7' 45''$.

Razones trigonométricas y calculadora

6.68. (TIC) Con la ayuda de la calculadora, halla los valores de las siguientes razones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen} 67^\circ$

c) $\cos 77^\circ$

e) $\operatorname{tg} 39^\circ$

b) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{7} \text{ rad}$

d) $\cos \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$

f) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \text{ rad}$

Expresa los resultados con tres cifras decimales.

a) $\operatorname{sen} 67^\circ = 0,921$

c) $\cos 77^\circ = 0,225$

e) $\operatorname{tg} 39^\circ = 0,810$

b) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{7} \text{ rad} = 0,434$

d) $\cos \frac{2\pi}{5} \text{ rad} = 0,309$

f) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \text{ rad} = 2,414$

6.69. (TIC) Con la ayuda de la calculadora, halla las medidas en grados sexagesimales de los siguientes ángulos agudos. Aproxima los resultados a los minutos.

a) $\widehat{\operatorname{sen} A} = 0,125$

b) $\widehat{\cos B} = 0,245$

c) $\widehat{\operatorname{tg} C} = 1,25$

a) $\hat{A} = 7^\circ 11'$

b) $\hat{B} = 75^\circ 49'$

c) $\hat{C} = 51^\circ 20'$

6.70. (TIC) Con la ayuda de la calculadora, halla las medidas en radianes de los siguientes ángulos agudos. Expresa los resultados con tres cifras decimales.

a) $\widehat{\operatorname{sen} A} = 0,85$

b) $\widehat{\cos B} = 0,645$

c) $\widehat{\operatorname{tg} C} = 0,556$

a) $\hat{A} = 1,016 \text{ rad}$

b) $\hat{B} = 0,870 \text{ rad}$

c) $\hat{C} = 0,507 \text{ rad}$

Relaciones entre razones trigonométricas

6.71. (TIC) Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo α si $\operatorname{sen} \alpha = 0,6$.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

6.72. (TIC) Halla el seno y la tangente de un ángulo agudo α cuyo coseno vale 0,8.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,6}{0,8} \approx 0,75$$

6.73. (TIC) Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo α cuya tangente es igual a $\sqrt{5}$.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + (\sqrt{5})^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0,408$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6} \approx 0,913$$

6.74. Demuestra las siguientes igualdades.

a) $\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \cos x$

b) $\frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + 1}{2} = \operatorname{sen}^2 x$

c) $\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

a) $\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \sqrt{\frac{1}{1/\cos^2 x}} = \sqrt{\cos^2 x} = \cos x$

b) $\frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + 1}{2} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + (1 - \cos^2 x)}{2} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 x}{2} = \operatorname{sen}^2 x$

c) $\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)^2 = \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} \right)^2 = \left(\frac{1}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

6.75. Demuestra las siguientes igualdades.

a) $\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \operatorname{sen}^2 \alpha$

b) $\frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$

c) $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha = 1$

a) $\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha$

b) $\frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$

c) $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = 1$

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

6.76. Sin calcular su valor, indica el signo de las siguientes razones trigonométricas.

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) $\cos 315^\circ$ | d) $\sen 150^\circ$ | g) $\tg 190^\circ$ |
| b) $\sen 850^\circ$ | e) $\tg 118^\circ$ | h) $\cos 230^\circ$ |
| c) $\sen 340^\circ$ | f) $\cos 460^\circ$ | i) $\tg 721^\circ$ |

- a) $\cos 315^\circ$ es positivo, ya que 315° es un ángulo del cuarto cuadrante.
 b) $\sen 850^\circ$ es positivo, ya que 850° equivale al ángulo 130° , situado en el segundo cuadrante.
 c) $\sen 340^\circ$ es negativo, ya que 340° es un ángulo del cuarto cuadrante.
 d) $\sen 150^\circ$ es positivo, ya que 150° es un ángulo del segundo cuadrante.
 e) $\tg 118^\circ$ es negativo, ya que 118° es un ángulo del segundo cuadrante.
 f) $\cos 460^\circ$ es negativo, ya que 460° equivale al ángulo de 100° , situado en el segundo cuadrante.
 g) $\tg 190^\circ$ es positivo, ya que 190° es un ángulo del tercer cuadrante.
 h) $\cos 230^\circ$ es negativo, ya que 230° es un ángulo del tercer cuadrante.
 i) $\tg 721^\circ$ es positivo, ya que 721° equivale al ángulo 1° , situado en el primer cuadrante.

6.77. ¿En qué cuadrantes se puede encontrar cada uno de los siguientes ángulos?

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| a) α si $\sen \alpha > 0$ | c) β si $\tg \beta > 0$ |
| b) χ si $\cos \chi < 0$ | d) δ si $\sen \delta < 0$ |

- a) α puede encontrarse en el primero o segundo cuadrante.
 b) χ puede encontrarse en el segundo o tercer cuadrante.
 c) β puede encontrarse en el primero o tercer cuadrante.
 d) δ puede encontrarse en el tercero o cuarto cuadrante.

6.78. (TIC) Comprueba si existe un ángulo α tal que $\sen \alpha = 0,25$ y $\cos \alpha = 0,75$.

Se tiene que cumplir la primera relación fundamental: $\sen^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Como $0,25^2 + 0,75^2 = 0,625$, no puede existir tal ángulo.

6.79. (TIC) Halla las otras dos razones trigonométricas del ángulo α en cada caso.

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $\cos \alpha = \frac{6}{7}$; | $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ |
| b) $\sen \alpha = 0,375$; | $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ |
| c) $\tg \alpha = \sqrt{2}$; | $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ |

- a) Como α es un ángulo del cuarto cuadrante, el seno y la tangente son negativos, y el coseno, positivo.

$$\sen^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sen \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{6}{7}\right)^2} = -\sqrt{\frac{13}{49}} = -\frac{\sqrt{13}}{7}$$

$$\tg \alpha = \frac{\sen \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{13}}{7}}{\frac{6}{7}} = -\frac{\sqrt{13}}{6}$$

- b) Como α es un ángulo del segundo cuadrante, el seno es positivo, y el coseno y la tangente, negativos.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - 0,375^2} \approx -0,927$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,375}{-0,927} \approx -0,405$$

- c) Como α es un ángulo del tercer cuadrante, el seno y el coseno son negativos, y la tangente, positiva.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + (\sqrt{2})^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

6.80. (TIC) Calcula las otras dos razones trigonométricas del ángulo α en cada caso.

a) $\cos \alpha = -\frac{4}{7}; \quad 180^\circ < \alpha < 270^\circ$

b) $\operatorname{sen} \alpha = -0,9; \quad 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

c) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2}; \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

- a) Como α es un ángulo del tercer cuadrante, el seno y el coseno son negativos, y la tangente, positiva.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{7}\right)^2} = -\sqrt{\frac{33}{49}} = -\frac{\sqrt{33}}{7}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{33}}{7}}{-\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{33}}{4}$$

- b) Como α es un ángulo del cuarto cuadrante, el seno y la tangente son negativos, y el coseno, positivo.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - (-0,9)^2} \approx 0,436$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-0,9}{0,436} \approx -2,064$$

- c) Como α es un ángulo del segundo cuadrante, el seno es positivo, y el coseno y la tangente son negativos.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + (-\sqrt{2})^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$