

3 Ecuaciones y sistemas

ACTIVIDADES INICIALES

- 3.I. Supón que tu idioma comienza a dividirse hoy en dos. Si el principio de la glotocronología se mantiene, ¿qué porcentaje de palabras básicas compartirán en el año 13 000?

$(1-0,14)^{11} = 0,19$, es decir, se mantendrán el 19 % de las palabras.

- 3.II. La palabra “noche” es de origen indoeuropeo y es similar en muchas lenguas. Averigua cómo se dice en diez de ellas.

Inglés: NIGHT

Francés: NUIT

Alemán: NACHT

Portugués: NOITE

Griego: N'YXTA

Holandés: NACHT

Italiano: NOTTE

Ruso: НОЧЬ

Catalán: NIT

Gallego: NOITE

- 3.III. Busca la clasificación de la Unesco del peligro de extinción de lenguas y pon ejemplos de cada categoría.

Según la Unesco, las lenguas en peligro de extinción se clasifican en:

- Vulnerable: galés (Gran Bretaña).
- En peligro: gaélico (Irlanda).
- Seriamente en peligro: tamazight (Túnez).
- En situación crítica: potawatomi (EE. UU.).
- Extinta: karami (Papúa Nueva Guinea).

ACTIVIDADES PROPUESTAS

3.1. (TIC) Resuelve estas ecuaciones.

$$\text{a) } x - \frac{2x-5}{12} = \frac{3x-1}{4}$$

$$\text{b) } \left(\frac{1-x}{3}\right) = \frac{x}{2} - \frac{x+1}{6}$$

$$\text{c) } x(x-5) = x(x-1) + 2$$

$$\text{d) } 3x(x+3) = 9x + 12$$

$$\text{e) } -2x(x-1) = x^2 - 5x$$

$$\text{a) } x - \frac{2x-5}{12} = \frac{3x-1}{4}$$

$$12x - 2x + 5 = 9x - 3$$

$$x = -8$$

$$\text{b) } \left(\frac{1-x}{3}\right) = \frac{x}{2} - \frac{x+1}{6}$$

$$2 - 2x = 3x - x - 1$$

$$3 = 4x \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$\text{c) } x(x-5) = x(x-1) + 2$$

$$x^2 - 5x = x^2 - x + 2$$

$$-4x = 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{d) } 3x(x+3) = 9x + 12$$

$$3x^2 + 9x = 9x + 12 \Rightarrow 3x^2 = 12$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{12}{3}} = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = 2 \text{ y } x = -2$$

$$\text{e) } -2x(x-1) = x^2 - 5x$$

$$-2x^2 + 2x = x^2 - 5x \Rightarrow 3x^2 - 7x = 0$$

$$x(3x-7) = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3} \text{ y } x = 0$$

$$\text{f) } 2x - (x+5)(x-1) = 4$$

$$\text{g) } (x-1)\left(\frac{3-x}{2}\right) = 4$$

$$\text{h) } 9x^2 + 9x - 10 = 0$$

$$\text{i) } 3x^2 + 5x = 5(x+135)$$

$$\text{j) } x^2 - x(3x+1) = 3$$

$$\text{f) } 2x - (x+5)(x-1) = 4$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4}}{2} \Rightarrow x = \sqrt{2} - 1 \text{ y } x = -\sqrt{2} - 1$$

$$\text{g) } (x-1)\left(\frac{3-x}{2}\right) = 4$$

$$x^2 - 4x + 3 = -8 \Rightarrow x^2 - 4x + 11 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 44}}{2} \Rightarrow \text{No tiene soluciones reales.}$$

$$\text{h) } 9x^2 + 9x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \cdot 10 \cdot 9}}{2 \cdot 9} = \frac{-9 \pm \sqrt{441}}{18}$$

$$x = -\frac{5}{3} \text{ y } x = \frac{2}{3}$$

$$\text{i) } 3x^2 + 5x = 5(x+135)$$

$$3x^2 + 5x = 5x + 675 \Rightarrow 3x^2 = 675$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{675}{3}} = \pm\sqrt{225} \Rightarrow x = -15 \text{ y } x = 15$$

$$\text{j) } x^2 - x(3x+1) = 3$$

$$x^2 - 3x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 + x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \text{No tiene soluciones reales.}$$

3.2. (TIC) Halla las soluciones de estas ecuaciones.

a) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

b) $x^3 - 5x - 2 = 0$

c) $x(x^2 - 4) = x^2 + 8x$

d) $x^{2012} - x^{2011} = 0$

e) $2x^4 + 5x^3 = x^2 - 5x + 3$

f) $2x^4 - 6x^3 = 32x^2 - 96x$

g) $(x - 5)(2x + 7)(x + 3) = 0$

h) $x^5 - 3x^3 - 4x = 0$

a) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

$x(x^2 - 5x + 6) = 0$

$x = 0$ y $x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 24}}{2} \Rightarrow x = 3$ y $x = 2$

e) $2x^4 + 5x^3 = x^2 - 5x + 3$

$2x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x - 3 = 0$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 5 & -1 & 5 & -3 \\ -3 & & -6 & 3 & -6 & 3 \\ \hline & 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

$x = -3$

$2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$

No tiene soluciones enteras. $x = \frac{1}{2}$

b) $x^3 - 5x - 2 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -5 & -2 \\ -2 & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$x = -2$ y $x^2 - 2x - 1 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4}}{2} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}$ y $x = 1 - \sqrt{2}$

f) $2x^4 - 6x^3 = 32x^2 - 96x$

$x(2x^3 - 6x^2 - 32x + 96) = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -6 & -32 & 96 \\ 3 & & 6 & 0 & -96 \\ \hline & 2 & 0 & -32 & 0 \end{array}$$

$x = 3$ y $2x^2 = 32 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow x = 4$ y $x = -4$

c) $x(x^2 - 4) = x^2 + 8x$

$x^3 - x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 12) = 0$

$x = 0$ y $x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 48}}{2} \Rightarrow x = 4$ y $x = -3$

g) $(x - 5)(2x + 7)(x + 3) = 0$

$x = 5$, $x = -3$, $x = -\frac{7}{2}$

d) $x^{2012} - x^{2011} = 0 \Rightarrow x^{2011}(x - 1) = 0$

$x = 0$ y $x = 1$

h) $x^5 - 3x^3 - 4x = 0$

$x(x^4 - 3x^2 - 4) = 0$

$x = 0$ y $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow x^2 = 4$ y $x^2 = -1$

$x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = 2$ y $x = -2$

$x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow$ No tiene soluciones reales.

3.6. Actividad interactiva.

3.7. Actividad resuelta.

3.8. (TIC) Resuelve estas ecuaciones racionales.

a) $\frac{x-3}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} = 3$

c) $\frac{x+1}{x-3} = 5 - \frac{x+9}{x+2}$

b) $x + \frac{4x}{x-4} = \frac{16}{x-4}$

d) $\frac{3x+2}{x^2-4} = \frac{5x+1}{x+2} - \frac{1}{x-2}$

a) $\frac{x-3}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} = 3 \Rightarrow x-3 + x(x+2) = 3(x^2-4) \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 72}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 9}{2 \cdot 2} \Rightarrow x = 3 \text{ y } x = -\frac{3}{2}$$

b) $x + \frac{4x}{x-4} = \frac{16}{x-4} \Rightarrow x(x-4) + 4x = 16 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = -4, x = 4, \text{ no es solución.}$

c) $\frac{x+1}{x-3} = 5 - \frac{x+9}{x+2} \Rightarrow (x+1)(x+2) = 5(x^2-x-6) - (x+9)(x-3) \Rightarrow 3x^2 - 14x - 5 = 0$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 + 60}}{2 \cdot 3} = \frac{14 \pm 16}{6} \Rightarrow x = 5 \text{ y } x = -\frac{1}{3}$$

d) $\frac{3x+2}{x^2-4} = \frac{5x+1}{x+2} - \frac{1}{x-2} \Rightarrow 3x+2 = (5x+1)(x-2) - (x+2) \Rightarrow 5x^2 - 13x - 6 = 0$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 + 120}}{2 \cdot 5} = \frac{13 \pm 17}{10} \Rightarrow x = 3 \text{ y } x = -0,4$$

3.9. (TIC) Resuelve estas ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x+3} + 1 = x - 8$

c) $\sqrt{5-4x} = \sqrt{2x+7} - 2$

b) $4x - 3\sqrt{x^2+9} = 1$

d) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-5} = 2$

a) $\sqrt{x+3} + 1 = x - 8 \Rightarrow \sqrt{x+3} = x - 9 \Rightarrow x+3 = x^2 - 18x + 81 \Rightarrow x^2 - 19x + 78 = 0$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot 78}}{2} = \frac{19 \pm 7}{2} \Rightarrow x = 13, \text{ es solución. } x = 6, \text{ no es solución.}$$

b) $4x - 3\sqrt{x^2+9} = 1 \Rightarrow 4x - 1 = 3\sqrt{x^2+9} \Rightarrow 16x^2 - 8x + 1 = 9x^2 + 81 \Rightarrow 7x^2 - 8x - 80 = 0$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 80 \cdot 7}}{2 \cdot 7} = \frac{8 \pm 48}{14} \Rightarrow x = 4, \text{ es solución. } x = -\frac{20}{7}, \text{ no es solución.}$$

c) $\sqrt{5-4x} = \sqrt{2x+7} - 2 \Rightarrow 5-4x = 2x+7 - 4\sqrt{2x+7} + 4 \Rightarrow 4\sqrt{2x+7} = 6x+6$

$$32x + 112 = 36x^2 + 72x + 36 \Rightarrow 36x^2 + 40x - 76 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 10x - 19 = 0$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 9 \cdot 19}}{2 \cdot 9} = \frac{-10 \pm 28}{18} \Rightarrow x = 1, \text{ es solución. } x = -\frac{19}{9}, \text{ no es solución.}$$

d) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-5} = 2 \Rightarrow 2x-3 = 4 + 4\sqrt{x-5} + x-5 \Rightarrow x-2 = 4\sqrt{x-5} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 16x - 80$

$$x^2 - 20x + 84 = 0 \Rightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 84}}{2} = \frac{20 \pm 8}{2} \Rightarrow x = 14, \text{ es solución. } x = 6, \text{ es solución.}$$

- 3.10. Al repartir 4000 € entre varios socios faltan 9, así que tocan a 90 € más cada uno. ¿Cuántos socios son?

Llamando x al número de socios, la ecuación que resuelve el problema es:

$$\frac{4000}{x-9} = \frac{4000}{x} + 90 \Rightarrow 4000x = 4000x - 36000 + 90x^2 - 810x \Rightarrow x^2 - 9x - 400 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm 41}{2},$$

cuya única solución positiva es $x = 25$.

Son 25 socios.

- 3.11. Actividad resuelta.

- 3.12. Resuelve mentalmente estas ecuaciones en las que aparecen logaritmos.

- | | |
|----------------------|---------------------|
| a) $\log x = 6$ | d) $\log_x 16 = 2$ |
| b) $\log_x x = 1$ | e) $\ln(6-x) = 0$ |
| c) $\log(x+300) = 3$ | f) $\log_3 x^7 = 7$ |

- | | |
|----------------------|--|
| a) $\log x = 6$ | $x = 1000000$ |
| b) $\log_x x = 1$ | x puede ser cualquier número positivo (distinto de 1). |
| c) $\log(x+300) = 3$ | $x = 700$ |
| d) $\log_x 16 = 2$ | $x = 4$ |
| e) $\ln(6-x) = 0$ | $x = 5$ |
| f) $\log_3 x^7 = 7$ | $x = 3$ |

- 3.13. (TIC) Resuelve estas ecuaciones logarítmicas.

- a) $\log x + \log(x+1) = \log 6$
 b) $\log x - \log(x+3) = -1$
 c) $\log(x-2) + \log 5 = 1 - \log(x-3)$

a) $\log x + \log(x+1) = \log 6 \Rightarrow \log x(x+1) = \log 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$

Una solución: $x = 2$

b) $\log x - \log(x+3) = -1 \Rightarrow \log \frac{x}{x+3} = -1 \Rightarrow \frac{x}{x+3} = \frac{1}{10} \Rightarrow 10x = x+3 \Rightarrow 9x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

c) $\log(x-2) + \log 5 = 1 - \log(x-3) \Rightarrow \log 5(x-2) + \log(x-3) = 1 \Rightarrow \log 5(x-2)(x-3) = 1$

$$x^2 - 5x + 6 = 2 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}. \text{ Una solución: } x = 4$$

3.14. (TIC) Halla la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $2\log x = 3\log 2 + \log(x + 6)$

b) $\log(x^2 - 15x) = 2$

c) $\log\sqrt{x} = 1 - \log\sqrt{3x + 5}$

a) $2\log x = 3\log 2 + \log(x + 6) \Rightarrow \log x^2 = \log 8(x + 6) \Rightarrow x^2 = 8x + 48 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 48}}{2} = \frac{8 \pm 16}{2}$

Una solución: $x = 12$

b) $\log(x^2 - 15x) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\log(x^2 - 15x) = 1 \Rightarrow \log\sqrt{x^2 - 15x} = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 15x} = 10 \Rightarrow x^2 - 15x - 100 = 0$

$x = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 + 4 \cdot 100}}{2} = \frac{15 \pm 25}{2} \Rightarrow x = 20 \text{ y } x = -5$

c) $\log\sqrt{x} = 1 - \log\sqrt{3x + 5} \Rightarrow \log\sqrt{x}\sqrt{3x + 5} = 1 \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 5x} = 10 \Rightarrow 3x^2 + 5x - 100 = 0$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 100 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm 35}{6}$. Una solución: $x = 5$

3.15. Encuentra qué relación debe existir entre **A** y **B** para que se cumpla la igualdad:

$$\log A + \log B = \log(A + B)$$

$$\log A + \log B = \log(A + B) \Rightarrow \log(A \cdot B) = \log(A + B) \Rightarrow A \cdot B = A + B$$

3.16. Despeja **m** en la siguiente igualdad:

$$\log m = b - \log n$$

$$\log m = b - \log n \Rightarrow \log m = \log 10^b - \log n \Rightarrow \log m = \log \frac{10^b}{n} \Rightarrow m = \frac{10^b}{n}$$

3.17. Actividad resuelta.

3.18. Resuelve estas ecuaciones.

a) $2^{3x-4} = 64$

c) $2^{x+1} = 1024$

b) $3^{2x-7} \cdot 27 = 3^{5x}$

d) $2^3 \cdot 2^{x-5} = 0,25$

a) $2^{3x-4} = 64 \Rightarrow 2^{3x-4} = 2^6 \Rightarrow 3x - 4 = 6 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$

b) $3^{2x-7} \cdot 27 = 3^{5x} \Rightarrow 3^{2x-7} \cdot 3^3 = 3^{5x} \Rightarrow 3^{2x-7+3} = 3^{5x} \Rightarrow 2x - 4 = 5x \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

c) $2^{x+1} = 1024 \Rightarrow 2^{x+1} = 2^{10} \Rightarrow x + 1 = 10 \Rightarrow x = 9$

d) $2^3 \cdot 2^{x-5} = 0,25 \Rightarrow 2^{3+x-5} = 2^{-2} \Rightarrow x - 2 = -2 \Rightarrow x = 0$

3.19. (TIC) Resuelve estas ecuaciones exponenciales tomando logaritmos y usando la calculadora.

a) $5^{x+3} = 9999$

c) $5^x = 2^{x+3}$

b) $10^{3-x} = 2^x \cdot 128$

d) $2^{-x} = 10\,000$

a) $5^{x+3} = 9999 \Rightarrow \log(5^{x+3}) = \log 9999 \Rightarrow (x+3)\log 5 = \log 9999 \Rightarrow x = \frac{\log 9999}{\log 5} - 3 = 2,722$

b) $10^{3-x} = 2^x \cdot 128 \Rightarrow 10^{3-x} = 2^{x+7} \Rightarrow \log 10^{3-x} = \log 2^{x+7} \Rightarrow (3-x)\log 10 = (x+7)\log 2$
 $3-x = x\log 2 + 7\log 2 \Rightarrow 3-7\log 2 = x(\log 2 + 1) \Rightarrow x = \frac{3-7\log 2}{\log 2 + 1} = 0,686$

c) $\log 5^x = \log 2^{x+3} \Rightarrow x\log 5 = (x+3)\log 2 \Rightarrow x(\log 5 - \log 2) = 3\log 2 \Rightarrow x = \frac{3\log 2}{\log 5 - \log 2} = 2,269$

d) $2^{-x} = 10\,000 \Rightarrow 2^{-x} = 10^4 \Rightarrow \log 2^{-x} = \log 10^4 \Rightarrow -x\log 2 = 4 \Rightarrow x = -\frac{4}{\log 2} = -13,288$

3.20. (TIC) Halla las soluciones de estas ecuaciones.

a) $100^x - 1001 \cdot 10^x + 1000 = 0$

d) $4^x - 8 = 2^{x+1}$

b) $\frac{1}{2^{x-3}} = 5 - 2^{x-1}$

e) $4^{x+1} - 5 \cdot 4^{2x-1} + 4864 = 0$

c) $2^{3+2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 1 = 0$

a) $100^x - 1001 \cdot 10^x + 1000 = 0 \Rightarrow 10^{2x} - 1001 \cdot 10^x + 1000 = 0$

$10^x = z \Rightarrow z^2 - 1001z + 1000 = 0 \Rightarrow z = \frac{1001 \pm \sqrt{1001^2 - 4 \cdot 1000}}{2} = \frac{1001 \pm 999}{2} \Rightarrow z = 1000 \text{ y } z = 1$
 $x = 3 \text{ y } x = 0$

b) $\frac{1}{2^{x-3}} = 5 - 2^{x-1} \Rightarrow \frac{8}{2^x} = 5 - \frac{1}{2} \cdot 2^x \Rightarrow 2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$

$2^x = z \Rightarrow z^2 - 10z + 16 = 0 \Rightarrow z = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} \Rightarrow z = 8 \text{ y } z = 2 \Rightarrow x = 3 \text{ y } x = 1$

c) $2^{3+2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 1 = 0 \Rightarrow 8 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 1 = 0$

$2^x = z \Rightarrow 8z^2 - 6z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{2 \cdot 8} = \frac{6 \pm 2}{16} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \text{ y } z = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -1 \text{ y } x = -2$

d) $4^x - 8 = 2^{x+1} \Rightarrow 2^{2x} - 8 = 2 \cdot 2^x$

$2^x = z \Rightarrow z^2 - 2z - 8 = 0 \Rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 8}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow z = 4 \text{ y } z = -2 \Rightarrow x = 2.$

Una solución: $x = 2$

e) $4^{x+1} - 5 \cdot 4^{2x-1} + 4864 = 0 \Rightarrow 4 \cdot 4^x - \frac{5}{4} \cdot 4^{2x} + 4864 = 0 \Rightarrow 5 \cdot 4^{2x} - 16 \cdot 4^x - 19\,456 = 0$

$4^x = z \Rightarrow 5z^2 - 16z - 19\,456 = 0 \Rightarrow z = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 4 \cdot 5 \cdot 19\,456}}{2 \cdot 5} = 10 \Rightarrow z = 64 \text{ y } z = -\frac{304}{5}$

$x = 3$. Una solución: $x = 3$

3.21. Verifica que por los tres métodos se obtiene la misma solución para el sistema $\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x + 3y = -13 \end{cases}$.

Método de reducción:

$$\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x + 3y = -13 \end{cases} \xrightarrow[\text{Restamos las ecuaciones}]{1^\text{a Ecuación} \cdot 2} \begin{cases} 2x - 4y = 22 \\ 2x + 3y = -13 \end{cases}$$

$$-7y = 35 \rightarrow y = -5 \text{ y } x = 1$$

Método de sustitución:

$$\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x + 3y = -13 \end{cases} \rightarrow x = 2y + 11 \Rightarrow 2(2y + 11) + 3y = -13 \Rightarrow 7y = -35 \Rightarrow y = -5 \text{ y } x = 1$$

Método de igualación:

$$\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x + 3y = -13 \end{cases} \rightarrow x = 2y + 11 \Rightarrow 2y + 11 = \frac{-13 - 3y}{2} \Rightarrow 4y - 22 = -13 - 3y \Rightarrow 7y = -35 \Rightarrow y = -5 \text{ y } x = 1$$

3.22. (TIC) Resuelve por distintos métodos los sistemas:

a) $\begin{cases} 5x + y = 13 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 6 \end{cases}$

a) Método de sustitución:

$$\begin{cases} 5x + y = 13 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases} \rightarrow y = 13 - 5x \Rightarrow 3x + 4(13 - 5x) = 1 \Rightarrow -17x = -51 \Rightarrow x = 3 \text{ y } y = -2$$

b) Método de sustitución:

$$\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \rightarrow x = 4 + 5y \Rightarrow 3(4 + 5y) - y = 2 \Rightarrow 14y = -10 \Rightarrow y = -\frac{5}{7} \text{ y } x = \frac{3}{7}$$

c) Método de reducción:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 6 \end{cases} \xrightarrow[\text{Sumamos las ecuaciones}]{} \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$3x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ y } y = \frac{13}{3}$$

3.23. Si me das 70 monedas, tendré el triple de dinero que tú; pero si yo te doy las 70 monedas, entonces tú tendrás el quíntuple que yo.

¿Cuántas monedas tiene cada uno?

Llamando x a mis monedas e y a las tuyas, podemos formar este sistema:

$$\begin{cases} x + 70 = 3(y - 70) \\ y + 70 = 5(x - 70) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = -280 \\ -5x + y = -420 \end{cases} \rightarrow x = 3y - 280 \Rightarrow -5(3y - 280) + y = -420 \Rightarrow -14y = -1820$$

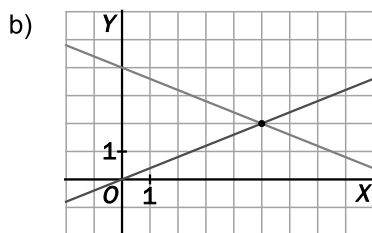
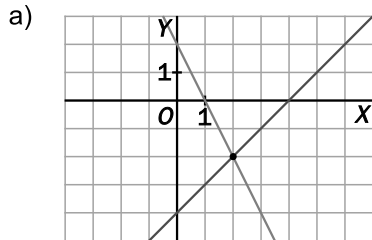
$y = 130$ y $x = 110$. Yo tengo 110 monedas, y tú, 130.

3.24. Actividad interactiva.

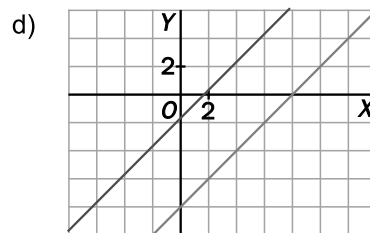
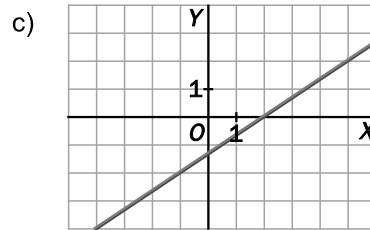
3.25. Actividad resuelta.

3.26. (TIC) Resuelve gráficamente estos sistemas.

a) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$



c) $\begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ 6x - 9y = 12 \end{cases}$



3.27. ¿Por qué a las ecuaciones del tipo $ax + by = p$ se las llama ecuaciones lineales?

Las ecuaciones del tipo $ax + by = p$ se llaman ecuaciones lineales porque al representarlas gráficamente dan lugar a una recta.

3.28. Hay un número de dos cifras que suman 10 y que, al intercambiarse, forman otro número que supera en 36 unidades al número inicial. ¿De cuál se trata?

Llamando x a las decenas y y a las unidades del número buscado, podemos escribir este sistema:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 10y + x = 10x + y + 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ -x + y = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumamos las ecuaciones}} \begin{cases} x + y = 10 \\ -x + y = 4 \end{cases} \quad \text{El número es 37.}$$

$$2y = 14 \rightarrow y = 7 \quad y \quad x = 3$$

3.29. Actividad resuelta.

3.30. (TIC) Resuelve estos dos sistemas.

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 25 \\ x + y = 25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 47 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 25 \\ x + y = 25 \end{cases} \rightarrow x = 25 - y \Rightarrow (25 - y)^2 - y^2 = 25 \Rightarrow 625 - 50y + y^2 - y^2 = 25 \Rightarrow -50y = -600$
 $y = 12 \quad y \quad x = 13$

b) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 47 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \rightarrow x = 2y + 7 \Rightarrow 2(2y + 7)^2 - 3y^2 = 47 \Rightarrow 8y^2 + 56y + 98 - 3y^2 = 47$

$$5y^2 + 56y + 51 = 0 \Rightarrow y = \frac{-56 \pm \sqrt{56^2 - 4 \cdot 5 \cdot 51}}{2 \cdot 5} = \frac{-56 \pm 46}{10} \Rightarrow y = -1 \quad y \quad x = 5 \quad y \quad y = -\frac{51}{5} \quad y \quad x = -\frac{67}{5}$$

3.31. (TIC) Resuelve estos sistemas no lineales.

a) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 46 \\ xy = 84 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 12 \\ xy = -3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 46 \\ xy = 84 \end{cases} \rightarrow x = \frac{84}{y} \Rightarrow \left(\frac{84}{y}\right)^2 - 2y^2 = 46 \Rightarrow 7056 - 2y^4 = 46y^2$

$$2y^4 + 46y^2 - 7056 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{-46 \pm \sqrt{46^2 + 4 \cdot 2 \cdot 7056}}{2 \cdot 2} = \frac{-46 \pm 242}{4} \Rightarrow y^2 = 49 \text{ y } y^2 = -72$$

Si $y^2 = 49 \Rightarrow y = 7$ y $x = 12$, $y = -7$ y $x = -12$. Si $y^2 = -72 \Rightarrow y$. No tiene solución.

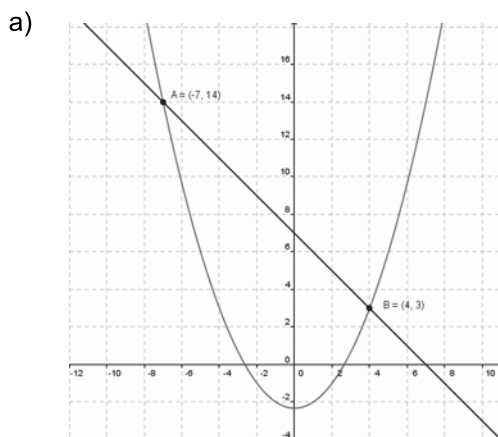
b) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 12 \\ xy = -3 \end{cases} \rightarrow x = \frac{-3}{y} \Rightarrow 3\left(\frac{-3}{y}\right)^2 + y^2 = 12 \Rightarrow 27 + y^4 = 12y^2$

$$y^4 - 12y^2 + 27 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 27}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} \Rightarrow y^2 = 9 \text{ y } y^2 = 3$$

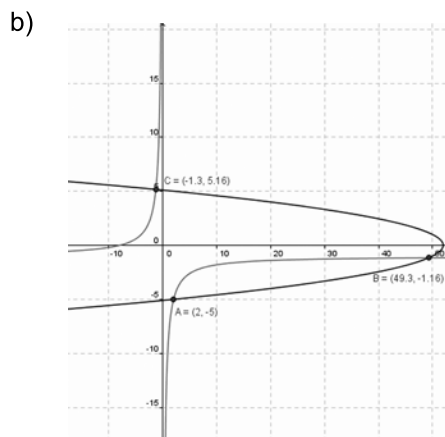
Si $y^2 = 9 \Rightarrow y = 3$ y $x = -1$, $y = -3$ y $x = 1$. $y^2 = 3 \Rightarrow y = +\sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$, no es solución.

3.32. (TIC) Con ayuda del programa GeoGebra, resuelve gráficamente estos sistemas.

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 - 3y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy + x = -8 \\ x + 2y^2 = 52 \end{cases}$



A(-7, 14), B(4, 3)



A(2, -5), B(49, 3), C(-1, 3)

3.33. La diferencia entre dos números positivos es 4, y la suma de sus cuadrados, 58. ¿Cuáles son?

Llamando x al mayor e y al menor, formamos este sistema:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases} \rightarrow x = 4 + y \Rightarrow (4 + y)^2 + y^2 = 58 \Rightarrow y^2 + 4y - 21 = 0 \Rightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 21}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2}$$

$y = 3$ y $x = 7$ y $y = -7$ y $x = -3$. Como solo nos vale la solución en la que x e y sean positivos, los números buscados son 7 y 3.

3.34. El área de un rectángulo es igual a 48 metros cuadrados y su diagonal mide 10 metros. Halla las longitudes de sus lados.

Llamando x e y a las longitudes, en metros, de sus lados, formamos este sistema:

$$\begin{cases} xy = 48 \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{cases} \rightarrow x = \frac{48}{y} \Rightarrow \left(\frac{48}{y}\right)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow 2304 + y^4 = 100y^2$$

$$y^4 - 100y^2 + 2304 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \cdot 2304}}{2} = \frac{100 \pm 28}{2} \Rightarrow y^2 = 64 \text{ y } y^2 = 36$$

Si $y^2 = 64 \Rightarrow y = 8$ y $x = 6$, $y = -8$ y $x = -6$. Si $y^2 = 36 \Rightarrow y = 6$ y $x = 8$, $y = -6$ y $x = -8$

Como las longitudes deben ser positivas, los lados del rectángulo miden 6 y 8 metros.

3.35. (TIC) Resuelve el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 90 \\ x + y = 12 \end{cases}$ de la siguiente forma: eleva al cuadrado la segunda ecuación y después réstale la primera ecuación.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 90 \\ x + y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 90 \\ (x + y)^2 = 12^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 90 \\ x^2 + y^2 + 2xy = 144 \end{cases} \Rightarrow 2xy = 54$$

El sistema se transforma en $\begin{cases} xy = 27 \\ x + y = 12 \end{cases} \rightarrow x = 12 - y \Rightarrow (12 - y)y = 27 \Rightarrow y^2 - 12y + 27 = 0$.

$$y = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 27}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} \Rightarrow y = 9 \text{ y } y = 3$$

Soluciones: $y = 9$ y $x = 3$, $y = 3$ y $x = 9$

3.36. Actividad interactiva.

3.37. (TIC) Resuelve estos sistemas exponenciales.

a) $\begin{cases} 3^{x+y} = 3 \\ 3^{x-2y} = 81 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5^x + 2^y = 33 \\ 5^{x-1} - 2^{y-1} = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3^{x+y} = 3 \\ 3^{x-2y} = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 3 \\ 3^x = 81 \cdot 3^{2y} \end{cases} \Rightarrow 81 \cdot 3^{2y} \cdot 3^y = 3 \Rightarrow 3^{3y} = \frac{3}{81} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3} \Rightarrow 3y = -3 \Rightarrow y = -1$ y $x = 2$

b) $\begin{cases} 5^x + 2^y = 33 \\ 5^{x-1} - 2^{y-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^x + 2^y = 33 \\ \frac{5^x}{5} - \frac{2^y}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^x + 2^y = 33 \\ 2 \cdot 5^x - 5 \cdot 2^y = 10 \end{cases} \xrightarrow{\substack{5^x = s \\ 2^y = t}} \begin{cases} s + t = 33 \\ 2s - 5t = 10 \end{cases} \rightarrow s = 33 - t$

$$66 - 2t - 5t = 10 \Rightarrow -7t = -56 \Rightarrow t = 8 \text{ y } s = 25 \Rightarrow \begin{cases} s = 5^x = 25 \Rightarrow x = 2 \\ t = 2^y = 8 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

3.38. (TIC) Resuelve estos sistemas logarítmicos.

a)
$$\begin{cases} x - y = 9 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \log(2x - 4) + \log y = 2 \\ 4x - y = -9 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} x - y = 9 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 9 \\ \log \frac{x}{y} = \log 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 9 \\ x = 10y \end{cases} \Rightarrow 10y - y = 9 \Rightarrow y = 1 \text{ y } x = 10$$

b)
$$\begin{cases} \log(2x - 4) + \log y = 2 \\ 4x - y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(2x - 4)y = \log 100 \\ 4x - y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy - 4y = 100 \\ y = 4x + 9 \end{cases} \Rightarrow 2x(4x + 9) - 4(4x + 9) = 100$$

$$4x^2 + x - 68 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 4 \cdot 68}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm 33}{8} \Rightarrow x = 4 \text{ y } x = -\frac{17}{4}, \text{ no es solución.}$$

Si $x = 4, y = 25$

3.39. (TIC) Halla la solución de los siguientes sistemas.

a)
$$\begin{cases} 10^{2x+y} = 100 \\ \log(2x - y) = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5^{xy} = 1 \\ \log_8(x^2 y) = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 5^{x-2y} = 1 \\ \log(2x + y) - \log(y - 1) = 1 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} 10^{2x+y} = 100 \\ \log(2x - y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10^{2x+y} = 10^2 \\ \log(2x - y) = \log 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Restamos}} \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \\ 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ y } x = \frac{3}{4}$$

b)
$$\begin{cases} 5^{xy} = 1 \\ \log_8(x^2 y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{xy} = 1 \\ \log_8(x^2 y) = \log_8 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{xy} = 5^0 \rightarrow xy = 0 \\ x^2 y = 8 \rightarrow xy = \frac{8}{x} \end{cases} \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

c)
$$\begin{cases} 5^{x-2y} = 1 \\ \log(2x + y) - \log(y - 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{x-2y} = 5^0 \\ \log \frac{(2x + y)}{(y - 1)} = \log 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \rightarrow x = 2y \\ 2x + y = 10y - 10 \end{cases}$$

$$4y - 9y = -10 \Rightarrow -5y = -10 \Rightarrow y = 2 \text{ y } x = 4.$$

EJERCICIOS

Ecuaciones polinómicas

3.40. (TIC) Resuelve estas ecuaciones lineales.

a) $-4x + 3 = 7x - 19$

b) $\frac{-3x}{4} + \frac{1}{2} = -5x + 26$

c) $-5(2x - 1) + 3x - 2 = -(6x - 4) + 7$

d) $\frac{4x - 3}{5x + 1} = \frac{9}{16}$

e) $\frac{x + 3}{6} + \frac{2x - 1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x - 5}{12} - \frac{2}{3}$

a) $-4x + 3 = 7x - 19 \Rightarrow -11x = -22 \Rightarrow x = 2$

b) $\frac{-3x}{4} + \frac{1}{2} = -5x + 26 \Rightarrow -3x + 2 = -20x + 104 \Rightarrow 17x = 102 \Rightarrow x = 6$

c) $-5(2x - 1) + 3x - 2 = -(6x - 4) + 7 \Rightarrow -10x + 5 + 3x - 2 = -6x + 4 + 7 \Rightarrow x = -8$

d) $\frac{4x - 3}{5x + 1} = \frac{9}{16} \Rightarrow 16(4x - 3) = 9(5x + 1) \Rightarrow 64x - 48 = 45x + 9 \Rightarrow 19x = 57 \Rightarrow x = 3$

e) $\frac{x + 3}{6} + \frac{2x - 1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x - 5}{12} - \frac{2}{3} \Rightarrow 2x + 6 + 8x - 4 + 3 = x - 5 - 8 \Rightarrow 9x = -18 \Rightarrow x = -2$

3.41. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores.

a) $\frac{x - 4}{5} - 3(-2x + 2) - \frac{(-4x + 2)}{10} = \frac{5x + 6}{2}$

b) $3(2x - 5) + 8x - 6 = \frac{x}{2} - (5x + 3)$

c) $\frac{3(x + 3)}{2} - 2(2 - 3x) = 8x - 1 - 2(x + 3)$

d) $\frac{6 - 2(x - 3)}{7x} = -\frac{8}{4}$

e) $\frac{3(x - 2)}{5} + 2(-3x + 1) - \frac{2}{5} = \frac{-4x + 3}{15} + \frac{16}{3}$

a) $\frac{x - 4}{5} - 3(-2x + 2) - \frac{(-4x + 2)}{10} = \frac{5x + 6}{2} \Rightarrow \frac{x - 4}{5} + 6x - 6 - \frac{-4x + 2}{10} = \frac{5x + 6}{2}$

$$2x - 8 + 60x - 60 + 4x - 2 = 25x + 30 \Rightarrow 41x = 100 \Rightarrow x = \frac{100}{41}$$

b) $3(2x - 5) + 8x - 6 = \frac{x}{2} - (5x + 3) \Rightarrow 12x - 30 + 16x - 12 = x - 10x - 6 \Rightarrow 37x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{37}$

c) $\frac{3(x + 3)}{2} - 2(2 - 3x) = 8x - 1 - 2(x + 3) \Rightarrow 3x + 9 - 8 + 12x = 16x - 2 - 4x - 12 \Rightarrow 3x = -15 \Rightarrow x = -5$

d) $\frac{6 - 2(x - 3)}{7x} = -\frac{8}{4} \Rightarrow 6 - 2x + 6 = -14x \Rightarrow 12x = -12 \Rightarrow x = -1$

e) $\frac{3(x - 2)}{5} + 2(-3x + 1) - \frac{2}{5} = \frac{-4x + 3}{15} + \frac{16}{3} \Rightarrow 9x - 18 - 90x + 30 - 6 = -4x + 3 + 80 \Rightarrow x = -1$

3.42. Clasifica en tu cuaderno las siguientes ecuaciones de segundo grado según el número de soluciones distintas que tengan.

- | | |
|-------------------------|---------------------|
| a) $5x^2 + 6x + 2 = 0$ | I. Sin solución |
| b) $-3x^2 + 4x + 5 = 0$ | II. Una solución |
| c) $x^2 - 6x + 1 = 0$ | III. Dos soluciones |
| d) $x^2 - 5 = 0$ | |
- a) $b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 5 \cdot 2 < 0 \Rightarrow$ I
 b) $b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 > 0 \Rightarrow$ III
 c) $b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \Rightarrow$ III
 d) $b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot (-5) \cdot 1 > 0 \Rightarrow$ III

3.43. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| a) $6x^2 - 11x + 3 = 0$ | d) $-2x^2 + 2x + 24 = 0$ |
| b) $x^2 - 6x - 7 = 0$ | e) $3x^2 + x + 5 = 0$ |
| c) $x^2 - 6x + 9 = 0$ | f) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ |

- a) $x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{11 \pm 7}{12} \Rightarrow x = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ y $x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
- b) $x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 8}{2} \Rightarrow x = 7$ y $x = -1$
- c) $x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$. Raíz doble
- d) $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow x = 4$ y $x = -3$
- e) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-59}}{6}$. No tiene solución.
- f) $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm 0}{8} = \frac{-1}{2}$. Raíz doble

3.44. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando un procedimiento diferente al de la fórmula general.

- | | |
|-----------------------|---------------------------------|
| a) $3x^2 - 27 = 0$ | d) $-7x^2 + \frac{5}{2}x = 0$ |
| b) $x^2 + 2x + 1 = 0$ | e) $(x - 2)^2 - 25 = 0$ |
| c) $4x^2 + 1 = 4x$ | f) $(x + 4)^2 - (2x - 3)^2 = 0$ |

- a) $3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$
- b) $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Raíz doble
- c) $4x^2 + 1 = 4x \Rightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
- d) $x \left(-7x + \frac{5}{2} \right) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $-7x + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{14}$
- e) $(x - 2)^2 = 25 \Rightarrow x - 2 = 5 \Rightarrow x = 7$ y $x - 2 = -5 \Rightarrow x = -3$
- f) $(x + 4)^2 - (2x - 3)^2 = 0 \Rightarrow (x + 4)^2 = (2x - 3)^2 \Rightarrow x + 4 = 2x - 3 \Rightarrow x = 7$ y $x + 4 = -(2x - 3) \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

3.45. (TIC) Halla la solución de estas ecuaciones.

$$a) \quad \frac{3x^2}{2} - \frac{4x-1}{4} = \frac{2x(x-3)}{6} + \frac{17}{12}$$

$$b) \quad 3x^2 - 4x + 5(x^2 - 2) = \frac{3x(x-2)}{2} + 14$$

$$c) \quad 6x^2 - 1 + \frac{2x(-x+3)}{3} = \frac{5x^2-2}{6} - 4x^2 + \frac{59}{6}$$

$$d) \quad \frac{3(-x+2)}{5} + 4x\left(\frac{-2x+1}{3}\right) = x(-3x+1) - \frac{1}{2}$$

$$e) \quad \frac{3x-1}{5} = \frac{13}{4x+5}$$

$$a) \quad \frac{3x^2}{2} - \frac{4x-1}{4} = \frac{2x(x-3)}{6} + \frac{17}{12} \Rightarrow 18x^2 - 12x + 3 = 4x^2 - 12x + 17 \Rightarrow 14x^2 = 14 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$b) \quad 3x^2 - 4x + 5(x^2 - 2) = \frac{3x(x-2)}{2} + 14 \Rightarrow 6x^2 - 8x + 10x^2 - 20 = 3x^2 - 6x + 28 \Rightarrow 13x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{2 \cdot 13} = \frac{2 \pm 50}{26} \Rightarrow x = 2 \text{ y } x = -\frac{48}{26} = -\frac{24}{13}$$

$$c) \quad 6x^2 - 1 + \frac{2x(-x+3)}{3} = \frac{5x^2-2}{6} - 4x^2 + \frac{59}{6} \Rightarrow 36x^2 - 6 - 4x^2 + 12x = 5x^2 - 2 - 24x^2 + 59$$

$$17x^2 + 4x - 21 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 17 \cdot (-21)}}{2 \cdot 17} = \frac{-4 \pm 38}{34} \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = -\frac{42}{34} = -\frac{21}{17}$$

$$d) \quad \frac{3(-x+2)}{5} + 4x\left(\frac{-2x+1}{3}\right) = x(-3x+1) - \frac{1}{2} \Rightarrow -18x + 36 - 80x^2 + 40x = -90x^2 + 30x - 15$$

$$10x^2 - 8x + 51 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 10 \cdot 51}}{2 \cdot 10} = \frac{8 \pm \sqrt{-1976}}{20}. \text{ No tiene solución.}$$

$$e) \quad \frac{3x-1}{5} = \frac{13}{4x+5} \Rightarrow (3x-1)(4x+5) = 65 \Rightarrow 12x^2 + 15x - 4x - 5 = 65 \Rightarrow 12x^2 + 11x - 70 = 0$$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-70)}}{2 \cdot 12} = \frac{-11 \pm 59}{24} \Rightarrow x = 2 \text{ y } x = -\frac{70}{24} = -\frac{35}{12}$$

Ecuaciones racionales y con radicales

3.48. (TIC) Resuelve estas ecuaciones racionales.

$$a) \frac{4}{x-2} - \frac{6}{x+3} = \frac{1}{3}$$

$$b) \frac{x+1}{3x-2} + \frac{2x+1}{x+5} = \frac{3}{2}$$

$$c) \frac{4x+2}{x^2+2x+1} + \frac{3}{2} = \frac{x+5}{x+1}$$

$$d) \frac{3}{x+1} - \frac{6}{x+4} = \frac{-2}{4x-8}$$

$$a) \frac{4}{x-2} - \frac{6}{x+3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{12(x+3)}{3(x-2)(x+3)} - \frac{18(x-2)}{3(x-2)(x+3)} = \frac{(x-2)(x+3)}{3(x-2)(x+3)}$$

$$12x + 36 - 18x + 36 = x^2 + x - 6 \Rightarrow x^2 + 7x - 78 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-78)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 19}{2} \Rightarrow x = 6 \text{ y } x = -13$$

$$b) \frac{x+1}{3x-2} + \frac{2x+1}{x+5} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2(x+1)(x+5)}{2(3x-2)(x+5)} + \frac{2(2x+1)(3x-2)}{2(3x-2)(x+5)} = \frac{3(3x-2)(x+5)}{2(3x-2)(x+5)}$$

$$2x^2 + 12x + 10 + 12x^2 - 2x - 4 = 9x^2 + 39x - 30 \Rightarrow 5x^2 - 29x + 36 = 0$$

$$x = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 36}}{2 \cdot 5} = \frac{29 \pm 11}{10} \Rightarrow x = 4 \text{ y } x = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

$$c) \frac{4x+2}{x^2+2x+1} + \frac{3}{2} = \frac{x+5}{x+1} \Rightarrow \frac{4x+2}{(x+1)^2} + \frac{3}{2} = \frac{x+5}{x+1} \Rightarrow \frac{2(4x+2)}{2(x+1)^2} + \frac{3(x+1)^2}{2(x+1)^2} = \frac{2(x+5)(x+1)}{2(x+1)^2}$$

$$8x + 4 + 3x^2 + 6x + 3 = 2x^2 + 12x + 10 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = -3$$

$$d) \frac{3}{x+1} - \frac{6}{x+4} = \frac{-2}{4x-8} \Rightarrow \frac{6(x+4)(x-2)}{2(x+1)(x+4)(x-2)} - \frac{12(x+1)(x-2)}{2(x+1)(x+4)(x-2)} = \frac{-(x+1)(x+4)}{2(x+1)(x+4)(x-2)}$$

$$6x^2 + 12x - 48 - 12x^2 + 12x + 24 = -x^2 - 5x - 4 \Rightarrow 5x^2 - 29x + 20 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 20}}{2 \cdot 5} = \frac{29 \pm 21}{10} \Rightarrow x = 5 \text{ y } x = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

3.49. (TIC) Resuelve estas ecuaciones con radicales.

a) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$

d) $x + \sqrt{x-1} - 3 = 0$

g) $2\sqrt{x-1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x-1}}$

b) $\sqrt{8-x} = 2-x$

e) $\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4}$

h) $\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x+3} = 2$

c) $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1$

f) $\sqrt{5x+1} - 2 = \sqrt{x+1}$

a) $x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 = x \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 9 \text{ y } x = 4$$

Comprobación: $x = 9 \Rightarrow 9 - 3 - 6 = 0$, es correcto.

$x = 4 \Rightarrow 4 - 2 - 6 \neq 0$, no es correcto.

b) $\sqrt{8-x} = 2-x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 4 \text{ y } x = -1$

Comprobación: $x = 4 \Rightarrow \sqrt{8-4} \neq 2-4$, no es correcto.

$x = -1 \Rightarrow \sqrt{8+1} = 2+1$, es correcto.

c) $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Rightarrow x - 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 4 \text{ y } x = 1$$

Comprobación: $x = 4 \Rightarrow \sqrt{4} - \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$, es correcto.

$x = 1 \Rightarrow \sqrt{1} - \frac{2}{\sqrt{1}} \neq 1$, no es correcto.

d) $x + \sqrt{x-1} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 5 \text{ y } x = 2$

Comprobación: $x = 5 \Rightarrow 5 + \sqrt{5-1} - 3 = 0$, no es correcto.

$x = 2 \Rightarrow 2 + \sqrt{2-1} - 3 = 0$, es correcto.

e) $\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4} \Rightarrow 7x+1 = 4(x+4) \Rightarrow 7x+1 = 4x+16 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$

Comprobación: $x = 5 \Rightarrow \sqrt{7 \cdot 5 + 1} = 2\sqrt{5+4}$, es correcto.

f) $\sqrt{5x+1} - 2 = \sqrt{x+1} \Rightarrow 5x+1 - 4\sqrt{5x+1} + 4 = x+1 \Rightarrow 4x+4 = 4\sqrt{5x+1} \Rightarrow x+1 = \sqrt{5x+1}$
 $x^2 + 2x + 1 = 5x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = 3$

Comprobación: $x = 0 \Rightarrow \sqrt{0+1} - 2 = \sqrt{1}$, no es correcto;

$x = 3 \Rightarrow \sqrt{5 \cdot 3 + 1} - 2 = \sqrt{3+1}$, es correcto.

g) $2\sqrt{x-1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} - \frac{5\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow 2x - 2 - 5\sqrt{x-1} = 3 \Rightarrow$

$$-5\sqrt{x-1} = -2x + 5 \Rightarrow 25(x-1) = 4x^2 - 20x + 25 \Rightarrow 25x - 25 = 4x^2 - 20x + 25$$

$$4x^2 - 45x + 50 = 0 \Rightarrow x = \frac{45 \pm \sqrt{(-45)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 50}}{2 \cdot 4} = \frac{45 \pm 35}{8} \Rightarrow x = 10 \text{ y } x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Comprobación: $x = 10 \Rightarrow 2\sqrt{10-1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{10-1}}$, es correcto.

$x = \frac{5}{4} \Rightarrow 2\sqrt{\frac{5}{4}-1} - 5 \neq \frac{3}{\sqrt{\frac{5}{4}-1}}$ ya que $2\frac{1}{2} - 5 \neq \frac{3}{\frac{1}{2}}$, no es correcto.

h) $\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x+3} = 2 \Rightarrow \sqrt{2x^2+1} = 2 + \sqrt{x+3} \Rightarrow 2x^2 + 1 = 4 + x + 3 + 4\sqrt{x+3} \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 4\sqrt{x+3}$
 $4x^4 - 4x^3 - 23x^2 + 12x + 36 = 16x + 48 \Rightarrow 4x^4 - 4x^3 - 23x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x+2)(4x^3 - 12x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow x = -2$

Ecuaciones logarítmicas

3.50. (TIC) Halla la solución de estas ecuaciones.

a) $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1$

b) $\log_x \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = -0,4$

a) $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1 \Rightarrow 9^{2x-1} = \sqrt[5]{27} \Rightarrow 3^{4x-2} = 3^{\frac{3}{5}} \Rightarrow 4x - 2 = \frac{3}{5} \Rightarrow 20x - 10 = 3 \Rightarrow 20x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{20}$

b) $\log_x \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = -0,4 \Rightarrow \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = x^{-0,4} \Rightarrow 2^{\frac{3}{5}-1} = x^{-0,4} \Rightarrow 2^{-\frac{2}{5}} = x^{-0,4} \Rightarrow 2^{-0,4} = x^{-0,4} \Rightarrow x = 2$

3.51. (TIC) Resuelve estas ecuaciones logarítmicas.

a) $\log(x - 1) + \log(x + 1) = 3\log 2 + \log(x - 2)$

b) $\log(x - 2) - \frac{1}{2}\log(3x - 6) = \log 2$

c) $\log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) = 1 - \log_7(2x - 7)$

d) $\log_9(x + 1) - \log_9(1 - x) = \log_9(2x + 3)$

e) $\log_2 x - 1 = \log_2(x - 16)$

f) $\log x = \frac{1}{2} \log(x + 2)$

a) $\log(x - 1) + \log(x + 1) = 3\log 2 + \log(x - 2) \Rightarrow \log[(x - 1) \cdot (x + 1)] = \log[2^3 \cdot (x - 2)]$

$$x^2 - 1 = 8x - 16 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} \Rightarrow x = 5 \text{ y } x = 3$$

b) $\log(x - 2) - \frac{1}{2}\log(3x - 6) = \log 2 \Rightarrow \log \frac{(x - 2)^2}{3x - 6} = \log 2^2 \Rightarrow \frac{(x - 2)^2}{3x - 6} = 4$

$$x^2 - 16x + 28 = 0 \Rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28}}{2 \cdot 1} = \frac{16 \pm 12}{2} \Rightarrow x = 14 \text{ y } x = 2, \text{ no es solución.}$$

c) $\log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) = 1 - \log_7(2x - 7) \Rightarrow \log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) = \log_7 7 - \log_7(2x - 7)$

$$\log_7 \frac{x - 2}{x + 2} = \log_7 \frac{7}{2x - 7} \Rightarrow \frac{x - 2}{x + 2} = \frac{7}{2x - 7} \Rightarrow (x - 2)(2x - 7) = 7(x + 2) \Rightarrow 2x^2 - 11x + 14 = 7x + 14$$

$$2x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 2x(x - 9) = 0 \Rightarrow x = 9 \text{ y } x = 0, \text{ no es solución.}$$

d) $\log_9(x + 1) - \log_9(1 - x) = \log_9(2x + 3) \Rightarrow \log_9 \frac{x + 1}{1 - x} = \log_9(2x + 3) \Rightarrow \frac{x + 1}{1 - x} = 2x + 3 \Rightarrow$ x

$$+ 1 = (2x + 3)(1 - x) \Rightarrow x + 1 = -x - 2x^2 + 3 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ y } x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \text{ no es solución.}$$

e) $\log_2 x - 1 = \log_2(x - 16) \Rightarrow \log_2 x - \log_2 2 = \log_2(x - 16) \Rightarrow \log_2 \frac{x}{2} = \log_2(x - 16) \Rightarrow \frac{x}{2} = x - 16 \Rightarrow x = 32$

f) $\log x = \frac{1}{2} \log(x + 2) \Rightarrow x = \sqrt{x + 2} \Rightarrow x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ y } x = -1, \text{ no es solución.}$$

Ecuaciones exponenciales

3.52. (TIC) Resuelve estas ecuaciones exponenciales.

a) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

c) $\sqrt[3]{128} = 4^{2x}$

b) $2^{x-1} + 2^{x+2} = 72$

d) $\sqrt[5]{81} = 3^{1-3x}$

a) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$; cambio $2^x = u \Rightarrow u^2 - 9u + 8 = 0 \Rightarrow$

$$u = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3 \\ u = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

b) $2^{x-1} + 2^{x+2} = 72 \Rightarrow 2^{x-1} + 2^3 \cdot 2^{x-1} = 72 \Rightarrow 9 \cdot 2^{x-1} = 72 \Rightarrow 2^{x-1} = 8 \Rightarrow 2^{x-1} = 2^3 \Rightarrow x = 4$

c) $\sqrt[3]{128} = 4^{2x} \Rightarrow 2^{\frac{7}{3}} = 2^{4x} \Rightarrow \frac{7}{3} = 4x \Rightarrow x = \frac{7}{12}$

d) $\sqrt[5]{81} = 3^{1-3x} \Rightarrow 3^{\frac{4}{5}} = 3^{1-3x} \Rightarrow \frac{4}{5} = 1 - 3x \Rightarrow x = \frac{1}{15}$

3.53. (TIC) Resuelve estas ecuaciones exponenciales.

a) $6^{3-x} = 216$

d) $4^x - 3 \cdot 4^{x+1} + 4^{x+2} = 20$

b) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

e) $3^x \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$

c) $13^{2x} - 6 \cdot 13^x + 5 = 0$

f) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$

a) $6^{3-x} = 216 \Rightarrow 6^{3-x} = 6^3 \Rightarrow 3 - x = 3 \Rightarrow x = 0$

b) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3} \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3} \Rightarrow 3x - 7 = -7x + 3 \Rightarrow 10x = 10 \Rightarrow x = 1$

c) $13^{2x} - 6 \cdot 13^x + 5 = 0 \Rightarrow u = 13^x \Rightarrow u^2 - 6u + 5 = 0$

$$u = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = 5 \Rightarrow 13^x = 5 \Rightarrow \log_{13} 13^x = \log_{13} 5 \Rightarrow x = \log_{13} 5 = \frac{\log 5}{\log 13} \\ u = 1 \Rightarrow 13^x = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

d) $4^x - 3 \cdot 4^{x+1} + 4^{x+2} = 20 \Rightarrow 4^x - 12 \cdot 4^x + 16 \cdot 4^x = 20 \Rightarrow 5 \cdot 4^x = 20 \Rightarrow 4^x = 4 \Rightarrow x = 1$

e) $3^x \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x \Rightarrow \frac{3^x}{3^{x-3}} = \frac{1}{3^{3x}} \Rightarrow 3^3 = 3^{-3x} \Rightarrow 3 = -3x \Rightarrow x = -1$

f) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950 \Rightarrow 10^2 \cdot 10^{x-2} - 5 \cdot 5^{x-2} \cdot 2^{x-2} = 950 \Rightarrow 95 \cdot 10^{x-2} = 950 \Rightarrow 10^{x-2} = 10$
 $x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$

Sistemas de ecuaciones lineales

3.54. (TIC) Halla la solución de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

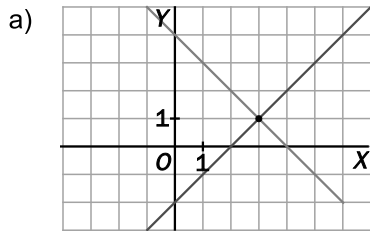
b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 3y = 6 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$
 $13x = 13 \Rightarrow x = 1$ e $y = 2$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 15 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$
 $10x = 20 \rightarrow x = 2$ e $y = -1$

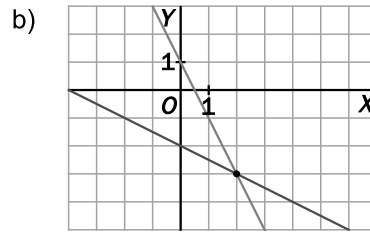
3.55. (TIC) Resuelve gráficamente estos sistemas.

a)
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$$



Una solución: $x = 3$ e $y = -1$

b)
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$$



Una solución: $x = 2$ e $y = -3$

3.56. (TIC) Resuelve los siguientes sistemas.

a)
$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{2y}{3} = 6 \\ -\frac{x}{10} + \frac{5y}{6} = -6 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3(-2x + 1) - 4y = 1 \\ 4x - 2(3y + 1) = 8 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 5 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{2y}{3} = 6 \\ -\frac{x}{10} + \frac{5y}{6} = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 10y = 90 \\ -3x + 25y = -180 \end{cases}$$

$$15y = -90 \rightarrow y = -6 \text{ y } x = 10$$

b)
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 8x + 15y = 100 \end{cases} \Rightarrow 8(y + 1) + 15y = 100 \Rightarrow 23y = 92 \Rightarrow y = 4 \text{ y } x = 5$$

c)
$$\begin{cases} 3(-2x + 1) - 4y = 1 \\ 4x - 2(3y + 1) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x - 4y = -2 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12x - 8y = -4 \\ 12x - 18y = 30 \end{cases}$$

$$-26y = 26 \rightarrow y = -1 \text{ y } x = 1$$

d)
$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 24 \end{cases}$$

$$4x = 24 \rightarrow x = 6 \text{ e } y = 4$$

3.57. Añade una ecuación a $3x - 2y = 5$ para formar un sistema que:

a) No tenga solución.

b) Tenga infinitas soluciones.

c) Tenga una única solución. ¿Puede ser esta solución $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$? ¿Y podría ser $\begin{cases} x = 7 \\ y = 8 \end{cases}$?

a) $3x - 2y = 9$

b) $6x - 4y = 10$

c) $x = 3$ e $y = 1$ nunca será solución porque no satisface la primera ecuación, $3x - 2y = 5$.

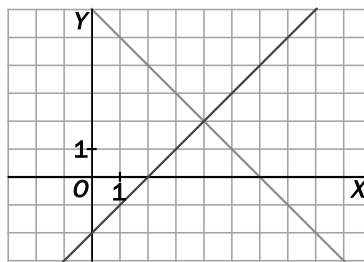
$x + y = 15$ da lugar a la solución $x = 7$ e $y = 8$.

3.58. Observa las siguientes gráficas.

¿A qué sistema están representando?

¿Cuál es la solución de dicho sistema?

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 6 - x \end{cases} \Rightarrow x - 2 = 6 - x \Rightarrow x = 4 \text{ e } y = 2$$



Sistemas de ecuaciones de segundo grado

3.59. (TIC) Resuelve estos sistemas no lineales.

a) $\begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 25 \\ 3x^2 - y^2 = -25 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = -20 \\ xy = -12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + xy + y = 9 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x^2 + xy = x \end{cases} \Rightarrow 4x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{8} = \frac{1 \pm 9}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} & y = 1 - 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{-11}{4} \\ x = -1 & y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ (x + y)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \pm 7 \\ x + y = \pm 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 10 \\ -2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ -2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -7 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -4 \\ -2y = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -7 \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -10 \\ -2y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$$

c) $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 25 \\ 3x^2 - y^2 = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^2 + y^2 = 25 \\ 8x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ y } y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 5$

d) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \rightarrow x = 5 - y \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = -20 \\ xy = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-12}{y} \\ 4 \frac{144}{y^2} - y^2 = -20 \end{cases} \Rightarrow 576 - y^4 = -20y^2 \Rightarrow y^4 - 20y^2 - 576 = 0$

$$y^2 = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 4 \cdot 576}}{2} = \frac{20 \pm 52}{2} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 36 \Rightarrow y = 6 \text{ y } x = -2, y = -6 \text{ y } x = 2 \\ y^2 = -16 \Rightarrow y \text{ no tiene solución.} \end{cases}$$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + xy + y = 9 \end{cases} \rightarrow x = \frac{9 - y}{1 + y} \Rightarrow \left(\frac{9 - y}{1 + y}\right)^2 + y^2 = 17 \Rightarrow (9 - y)^2 + y^2(1 + y)^2 = 17(1 + y)^2$

$$81 - 18y + y^2 + y^2 + 2y^3 + y^4 = 17 + 34y + 17y^2 \Rightarrow y^4 + 2y^3 - 15y^2 - 52y + 64 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & -15 & -52 & 64 \\ & & 1 & 3 & -12 & -64 \\ \hline & 1 & 3 & -12 & -64 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 3 & -12 & -64 \\ & & 4 & 28 & 64 \\ \hline & 1 & 7 & 16 & 0 \end{array}$$

$$y^4 + 2y^3 - 15y^2 - 52y + 64 = (y - 1)(y - 4)(y^2 + 7y + 16) \Rightarrow y = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{-25}}{2} \Rightarrow$$

No tiene más soluciones $\Rightarrow y = 1$ y $x = 4$ o $y = 4$ y $x = 1$.

3.60. (TIC) Halla la solución de estos sistemas.

a)
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ y^2 - 2x^2 = 7 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 61 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 6 \\ x \cdot y = 2 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} (x - y)^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \rightarrow y = 2x + 1 \\ y^2 - 2x^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow (2x + 1)^2 - 2x^2 = 7 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$x = 1$ e $y = 3$; $x = -3$ e $y = -5$

b)
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 6 \\ x \cdot y = 2 \end{cases} \rightarrow x = \frac{2}{y} \Rightarrow \frac{8}{y^3} + y^3 = 6 \Rightarrow 8 + y^6 = 6y^3 \Rightarrow y^6 - 6y^3 + 8 = 0$$

$$y^3 = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y^3 = 4 \Rightarrow y = \sqrt[3]{4} \text{ y } x = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2} \\ y^3 = 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{2} \text{ y } x = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 61 \\ x \cdot y = 12 \end{cases} \rightarrow x = \frac{12}{y} \Rightarrow \frac{144}{y^2} + y^2 = 25 \Rightarrow y^4 - 25y^2 + 144 = 0$$

$$y^2 = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \\ y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3 \end{cases}$$

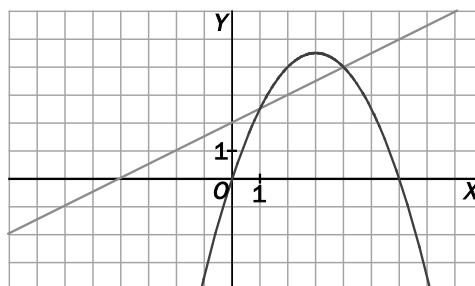
$y = 4$ y $x = 3$; $y = -4$ y $x = -3$; $y = 3$ y $x = 4$; $y = -3$ e $y = -4$

d)
$$\begin{cases} (x - y)^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y) = \pm 1 \\ (x - y)(x + y) = 7 \end{cases}, \text{ quedan dos posibles sistemas:}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$$

3.61. En la siguiente gráfica se han representado una recta y la parábola $y = \frac{-x^2 + 6x}{2}$. ¿A qué sistema no lineal están representando? Resuelve analíticamente dicho sistema.



$$\begin{cases} y = \frac{-x^2 + 6x}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{-x^2 + 6x}{2} = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ y } y = 2 \\ x = 1 \text{ y } y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

3.62. (TIC) Resuelve el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 221 \\ xy = 70 \end{cases}$ de este modo:

- 1.º Multiplica por dos la segunda ecuación.
- 2.º Suma las ecuaciones.
- 3.º Resta la segunda ecuación de la primera.
- 4.º Resuelve el sistema obtenido.
- 5.º Escribe correctamente los cuatro sistemas que salen.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 221 \\ xy = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 221 \\ 2xy = 140 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 361 \\ x^2 + y^2 - 2xy = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 361 \\ (x-y)^2 = 81 \end{cases}$$

que da lugar a cuatro sistemas:

$$\begin{cases} x+y = 19 \\ x-y = 9 \end{cases} \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = 5 \text{ y } x = 14 \qquad \begin{cases} x+y = 19 \\ x-y = -9 \end{cases} \Rightarrow 2y = 28 \Rightarrow y = 14 \text{ y } x = 5$$

$$\begin{cases} x+y = -19 \\ x-y = 9 \end{cases} \Rightarrow 2y = -28 \Rightarrow y = -14 \text{ y } x = -5 \qquad \begin{cases} x+y = -19 \\ x-y = -9 \end{cases} \Rightarrow 2y = -10 \Rightarrow y = -5 \text{ y } x = -14$$

Sistemas exponenciales y logarítmicos

3.63. (TIC) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales.

a) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5^{x+2} - 4^y = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 4 \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot 2^x + 4 \cdot 5^y = 36 \\ 4 \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 41 \end{cases}$
 $-5^y = -5 \rightarrow y = 1 \text{ y } 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

b) $\begin{cases} 5^{x+2} - 4^y = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 5^{x+1} - 4^2 \cdot 4^{y-2} = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 5^{x+1} - 16 \cdot 4^{y-2} = -3 \\ -48 \cdot 5^{x+1} + 16 \cdot 4^{y-2} = 16 \end{cases}$
 $\frac{-43 \cdot 5^{x+1}}{-43 \cdot 5^{x+1}} = \frac{16}{13}$

$5^{x+1} = \frac{-13}{43}$. No tiene solución.

3.64. (TIC) Halla las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.

a) $\begin{cases} 2\log x + \log y = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - 6y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2\log x + \log y = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(x^2 \cdot y) = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot y = 10^5 \\ xy = 10^4 \end{cases} \Rightarrow$

Se divide la primera ecuación entre la segunda $\Rightarrow x = 10$; entonces, $y = 10^3 = 1000$.

b) $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(x \cdot y) = 2 \\ x = 1 + 6y \end{cases} \Rightarrow x \cdot y = 10^2 \Rightarrow (1 + 6y)y = 100 \Rightarrow 6y^2 + y - 100 = 0$

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2400}}{12} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \text{ y } x = 25 \\ y = \frac{-50}{12} = \frac{-25}{6} \text{ y } x = -24 \end{cases}$

PROBLEMAS

- 3.65. Shalma vive en un poblado de Kenia y debe caminar hasta el poblado vecino para ir a la escuela. En la primera media hora recorre un cuarto del trayecto; en la media hora siguiente, dos quintos del trayecto restante, y todavía le quedan 4,5 kilómetros por recorrer.

¿A qué distancia se encuentra la escuela?

Llamamos x a la distancia de su casa a la escuela.

$$\frac{x}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3x}{4} = x - 4,5 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{6x}{20} = x - 4,5 \Rightarrow 5x + 6x = 20x - 90 \Rightarrow 9x = 90 \Rightarrow x = 10 \text{ km}$$

- 3.66. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su diagonal mide 15 centímetros, y su área, 108 centímetros cuadrados.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 15^2 \\ x \cdot y = 108 \end{cases} \rightarrow x = \frac{108}{y} \Rightarrow \left(\frac{108}{y}\right)^2 + y^2 = 15^2 \Rightarrow 108^2 + y^4 = 225y^2 \Rightarrow y^4 - 225y^2 + 11664 = 0$$

$$y^2 = \frac{225 \pm \sqrt{225^2 - 4 \cdot 11664}}{2} = \frac{225 \pm 63}{2} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 144 \Rightarrow y = 12 \text{ y } x = 9 \\ y^2 = 81 \Rightarrow y = 9 \text{ y } x = 12 \end{cases}$$

Las soluciones negativas no las consideramos porque las dimensiones de un rectángulo tienen que ser positivas.

El rectángulo tendrá por dimensiones 9×12 cm.

- 3.67. De un rombo se sabe que su área es de 120 centímetros cuadrados y que la proporción entre las diagonales mayor y menor es 10:3.

Calcula la medida de las diagonales.

$$\begin{cases} \frac{Dd}{2} = 120 \\ 3D = 10d \end{cases} \rightarrow d = \frac{3D}{10} \Rightarrow D \frac{3D}{10} = 240 \Rightarrow D^2 = 800 \Rightarrow D = 20\sqrt{2} \text{ cm y } d = \frac{3 \cdot 20\sqrt{2}}{10} \Rightarrow d = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

- 3.68. Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Uno de ellos advirtió que los apretones de manos fueron 66. ¿Cuántas personas concurrieron a la reunión?

En la reunión hay x personas. Cada persona da la mano a $x - 1$ personas.

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66 \Rightarrow x(x-1) = 132 \Rightarrow x^2 - x - 132 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-132)}}{2} = \frac{1 \pm 23}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -11 \end{cases}$$

Concurrieron 12 personas.

- 3.69. Una ebanista quiere partir un listón de madera de 30 centímetros de longitud en tres trozos para construir una escuadra, de manera que el trozo de mayor longitud mida 13 centímetros.

¿Cuál es la longitud de los otros trozos?

$$\begin{cases} x + y + 13 = 30 \rightarrow x = 17 - y \\ x^2 + y^2 = 13^2 \end{cases} \Rightarrow (17 - y)^2 + y^2 = 169 \Rightarrow y^2 - 17y + 60 = 0$$

$$y = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 4 \cdot 60}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 12 \text{ cm y } x = 5 \text{ cm} \\ y = 5 \text{ cm y } x = 12 \text{ cm} \end{cases}$$

Los otros dos trozos miden 5 y 12 cm.

- 3.70. Si a uno de los lados de un cuadrado se le aumenta su longitud en 5 centímetros y a su lado contiguo en 3 centímetros, el área de la figura aumenta en 71 centímetros cuadrados.

Calcula el lado del cuadrado.

$$(x + 5) \cdot (x + 3) = x^2 + 71 \Rightarrow x^2 + 8x + 15 = x^2 + 71 \Rightarrow 8x = 56 \Rightarrow x = 7 \text{ cm}$$

El lado mide 7 cm.

- 3.71. Utilizando la regla de la división, averigua el dividendo y el divisor sabiendo que el cociente es 2, el resto, 7, y que el producto de ambos es igual a 490.

$$\begin{cases} D = 2d + 7 \\ D \cdot d = 490 \end{cases} \Rightarrow (2d + 7)d = 490 \Rightarrow 2d^2 + 7d - 490 = 0 \Rightarrow d = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 2 \cdot 490}}{4} \Rightarrow \begin{cases} d = 14 \text{ y } D = 35 \\ d = -17,5 \end{cases}$$

El resultado $d = -17,5$ no es entero, por eso no lo consideramos.

- 3.72. (TIC) En unos laboratorios se ha comprobado que el número de células de una muestra se quintuplica cada minuto transcurrido.

Si inicialmente había dos células, ¿cuántos minutos deben transcurrir para que el número de células sea de 19 531 250?

$$2 \cdot 5^x = 19\,531\,250 \Rightarrow 5^x = 9\,765\,625 \Rightarrow 5^x = 5^{10} \Rightarrow x = 10$$

- 3.73.



$$\begin{cases} x + 3 = y^2 \\ x - 3 = \sqrt{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = y^2 \\ x - 3 = y \\ +6 = y^2 - y \end{cases} \Rightarrow y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \text{ y } x = 6 \\ y = -2 \end{cases}$$

Tiene 6 años.

- 3.74. (TIC) Una empresa de reciclado de papel mezcla pasta de papel de baja calidad, que compra por 0,25 euros el kilogramo, con pasta de papel de mayor calidad, de 0,40 euros por kilogramo, para conseguir 50 kilogramos de pasta de 0,31 euros el kilogramo.

¿Cuántos kilogramos utiliza de cada tipo?

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 0,25x + 0,4y = 50 \cdot 0,31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,25x + 0,25y = 12,5 \\ 0,25x + 0,4y = 15,5 \end{cases} \Rightarrow -0,15y = -3 \rightarrow y = 20 \text{ y } x = 30$$

Se utilizan 30 kg de pasta de baja calidad y 20 kg de pasta de mayor calidad.

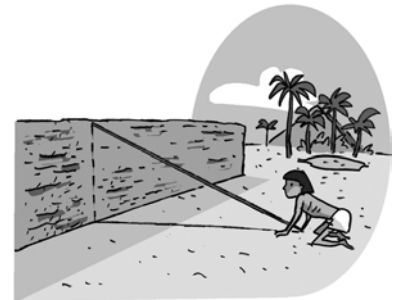
- 3.75. Las edades actuales de Ana y su hijo son 49 y 25 años, respectivamente. ¿Hace cuántos años el producto de sus edades era 640?

Hace x años: $(49 - x)(25 - x) = 640 \Rightarrow 1225 - 74x + x^2 = 640 \Rightarrow x^2 - 74x + 585 = 0$

$$x = \frac{74 \pm \sqrt{(-74)^2 - 4 \cdot 585}}{2} = \frac{74 \pm 56}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 65 \\ y = 9 \end{cases}$$

Hace 65 años no pudo ser porque no habían nacido. Por tanto, la respuesta correcta es hace 9 años.

- 3.76. En la civilización egipcia, debido a las periódicas inundaciones del Nilo, se borraban los lindes de separación de la tierra, y para la reconstrucción de las fincas necesitaban saber construir ángulos rectos.



En un viejo papiro se puede leer lo siguiente:

“La altura del muro, la distancia al pie del mismo y la línea que une ambos extremos son tres números consecutivos”.

Halla dichos números.

Tres números consecutivos: $x, x + 1, x + 2$

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Los números serán: 3, 4 y 5.

- 3.77. Una agricultora quiere saber el número de hectáreas de superficie que posee su huerto rectangular. Sabe que la distancia máxima existente entre dos puntos del mismo es de 25 decámetros y que la proporción entre el largo y el ancho es 4:3. Si 1 hectárea equivale a 100 decámetros cuadrados, ¿cuántas hectáreas tiene la superficie?

La distancia máxima entre dos puntos del rectángulo corresponderá a la diagonal de este.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25^2 \\ 3x = 4y \end{cases} \rightarrow x = \frac{4}{3}y \Rightarrow \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 625 \Rightarrow \frac{25}{9}y^2 = 625 \Rightarrow y^2 = 225 \Rightarrow y = 15 \text{ dam y } x = \frac{4}{3}15 = 20 \text{ dam}$$

Obviamente, solo consideramos las soluciones positivas.

$$\text{Área} = 15 \cdot 20 = 300 \text{ dam}^2 = 3 \text{ hectáreas}$$

- 3.78. Con la ayuda de los alumnos de varios centros escolares se está rehabilitando un pueblo abandonado. Ahora se ocupan de la remodelación de un depósito de 1000 metros cúbicos que abastece de agua potable al pueblo. Tiene forma de prisma cuadrangular y su altura es el cuadrado del lado de la base menos 6 metros.

Calcula la longitud del lado de la base y la altura del depósito.

$$\begin{cases} x^2 \cdot h = 1000 \\ h = x^2 - 15 \end{cases} \rightarrow x^2 = h + 15 \Rightarrow (h + 15) \cdot h = 1000 \Rightarrow h^2 + 15h - 1000 = 0 \Rightarrow h = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 4000}}{2} \Rightarrow \begin{cases} h = 25 \\ h = -40 \end{cases}$$

Nos quedamos con las soluciones positivas: $h = 25$ m.

$$x^2 = 40 \Rightarrow x = 2\sqrt{10} \text{ m}$$

- 3.79. Una muestra radiactiva se va desintegrando de modo que, cada cinco años, su masa se reduce a la mitad. Si se tienen 800 gramos de dicha sustancia radiactiva, ¿en cuánto tiempo su masa se reducirá a 50 gramos?

$$800 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x}{5}} = 50 \Rightarrow \frac{1}{2^{\frac{x}{5}}} = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{\frac{x}{5}} = 2^4 \Rightarrow \frac{x}{5} = 4 \Rightarrow x = 20 \text{ años}$$

- 3.80. Dos números suman $\frac{-1}{15}$ y su producto es $\frac{-2}{15}$. Hállalos. ¿De qué ecuación de segundo grado son solución esos dos números?

Aplicando el resultado de la actividad propuesta 5: $x = A$ y $x = B$ son las soluciones de $x^2 - (A+B)x + A \cdot B = 0$. En nuestro caso, la ecuación será $x^2 - \left(\frac{-1}{15} \right)x + \left(\frac{-2}{15} \right) = 0$, que da lugar a la

$$\text{ecuación } 15x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 15 \cdot 2}}{2 \cdot 15} = \frac{-1 \pm 11}{30}.$$

Los números son: $A = \frac{1}{3}$ y $B = \frac{-2}{5}$

3.85. Las dos soluciones de la ecuación:

$$a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0 \text{ son } 1 \text{ y:}$$

a) $\frac{b(c-a)}{a(b-c)}$

c) $\frac{a(b-c)}{b(c-a)}$

b) $\frac{a(b-c)}{c(a-b)}$

d) $\frac{c(a-b)}{a(b-c)}$

Siendo x_1 y x_2 las soluciones, sabemos que, por ejemplo, $1 \cdot x_2 = \frac{c(a-b)}{a(b-c)}$, de donde $x_2 = \frac{c(a-b)}{a(b-c)}$.

Respuesta d.

3.86. La solución del sistema $\begin{cases} 3^{x+y} = 81 \\ 81^{x-y} = 3 \end{cases}$ es:

a) No tiene.

c) x e y son de distinto signo.

b) $x = \frac{5}{2}, y = \frac{3}{2}$

d) Nada de lo anterior

Nos dicen que $x + y = 4$ y $x - y = \frac{1}{4}$, de donde $x = \frac{17}{8}, y = \frac{15}{8}$. Respuesta d.

AUTOEVALUACIÓN

3.1. Resuelve la siguiente ecuación lineal.

$$\frac{3(-2x+1)}{2} - 5(x-3) = \frac{3x-1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$-12x + 6 - 20x + 60 = 3x - 1 + 2 \Rightarrow -35x = -65 \Rightarrow x = \frac{13}{7}$$

3.2. Halla la solución de esta ecuación.

$$\frac{4x+5}{3} = \frac{1}{2x+3}$$

$$(4x+5)(2x+3) = 3 \Rightarrow 8x^2 + 22x + 12 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 11x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121-96}}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{4} \\ x = -2 \end{cases}$$

3.3. Resuelve la siguiente ecuación polinómica.

$$6x^4 + 7x^3 - 52x^2 - 63x - 18 = 0$$

6	7	-52	-63	-18		6	25	23	6
3	18	75	69	18	-3	-18	-21	-6	
6	25	23	6	0		6	7	2	0

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$P(x) = (x-3)(6x^3 + 25x^2 + 23x + 6) = (x-3)(x+3)(6x^2 + 7x + 2) = (x-3)(x+3)\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Soluciones: $x = 3$, $x = -3$, $x = -\frac{2}{3}$ y $x = -\frac{1}{2}$

3.4. Resuelve estas ecuaciones racionales.

a) $\frac{x^2-3}{2} = \frac{-3}{2x^2+1}$

b) $\frac{3}{x-2} + \frac{8}{x+5} = \frac{x+1}{x^2+3x-10}$

a) $(x^2-3)(2x^2+1) = -6 \Rightarrow 2x^4 - 5x^2 + 3 = 0$

$$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

b) $\frac{3}{x-2} + \frac{8}{x+5} = \frac{x+1}{(x-2)(x+5)} \Rightarrow \frac{3(x+5)}{(x-2)(x+5)} + \frac{8(x-2)}{(x-2)(x+5)} = \frac{x+1}{(x-2)(x+5)}$

$$3x + 15 + 8x - 16 = x + 1 \Rightarrow 10x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

3.5. Resuelve la siguiente ecuación con radicales.

$$\sqrt{4x+13} + 2 = \sqrt{-2x+3}$$

$$4x+13+4\sqrt{4x+13}+4 = -2x+3 \Rightarrow 2\sqrt{4x+13} = -3x-7 \Rightarrow 16x+52 = 9x^2+42x+49$$

$$9x^2+26x-3=0 \Rightarrow x = \frac{-26 \pm \sqrt{676+108}}{18} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} x = \frac{1}{9} \Rightarrow \sqrt{4\frac{1}{9}+13}+2 \neq \sqrt{-2\frac{1}{9}+3} \text{ no es solución} \\ x = -3 \Rightarrow \sqrt{-12+13}+2 = \sqrt{6+3} \text{ sí es solución} \end{cases}$$

3.6. Resuelve la siguiente ecuación logarítmica.

$$\log_3 \sqrt[5]{81} = 3x+2$$

$$\log_3 \sqrt[5]{81} = 3x+2 \Rightarrow \sqrt[5]{81} = 3^{3x+2} \Rightarrow 3^{\frac{4}{5}} = 3^{3x+2} \Rightarrow \frac{4}{5} = 3x+2 \Rightarrow 4 = 15x+10 \Rightarrow$$

$$15x = -6 \Rightarrow x = \frac{-2}{5}$$

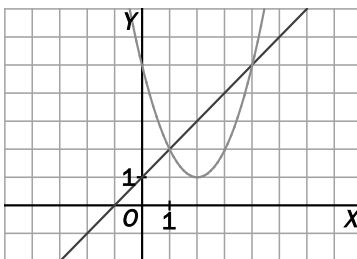
3.7. Resuelve la siguiente ecuación exponencial.

$$9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$$

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$$

$$\text{cambio } u = 3^x \Rightarrow u^2 - 10u + 9 = 0 \Rightarrow u = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \begin{cases} u = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2 \\ u = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

3.8. Averigua cuál es el sistema de ecuaciones cuya representación gráfica es la siguiente.



¿Cuáles son las soluciones del sistema?

$$\begin{cases} y = x+1 \\ y = x^2 - 4x + 5 \end{cases} \Rightarrow x+1 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5+3}{2} = 4 \text{ y } y = 5 \\ x = \frac{5-3}{2} = 1 \text{ y } y = 2 \end{cases}$$

3.9. Resuelve el sistema $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 29 \\ x^2 - 4y = 5 \end{cases}$.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 29 \\ 3x^2 - 12y = 15 \end{cases} \\ \hline 2y^2 + 12y = 14 \end{array} \quad y^2 + 6y - 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ y = -7 \Rightarrow x^2 = -23 \text{ no tiene solución} \end{cases}$$

Soluciones: $x = 3, y = 1$ $x = -3, y = 1$

3.10. Un grupo de estudiantes decide contratar un autobús para una excursión.

Calculan que si cada uno paga 14 euros, faltarán 4 euros para poder pagar el alquiler del autobús, pero si cada uno paga 16 euros, sobrarán 6 euros.

¿Cuántos euros debe pagar cada uno para recaudar el precio exacto del alquiler del autobús?

Precio del autobús: x

Número de alumnos: y

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 14y = x - 4 \\ 16y = x + 6 \end{cases} \\ \hline -2y = -10 \rightarrow y = 5 \text{ alumnos} \end{array}$$

$x = 14 \cdot 5 + 4 = 74$ € cuesta el autobús.

$$\frac{74}{5} = 14,80 \text{ €}$$