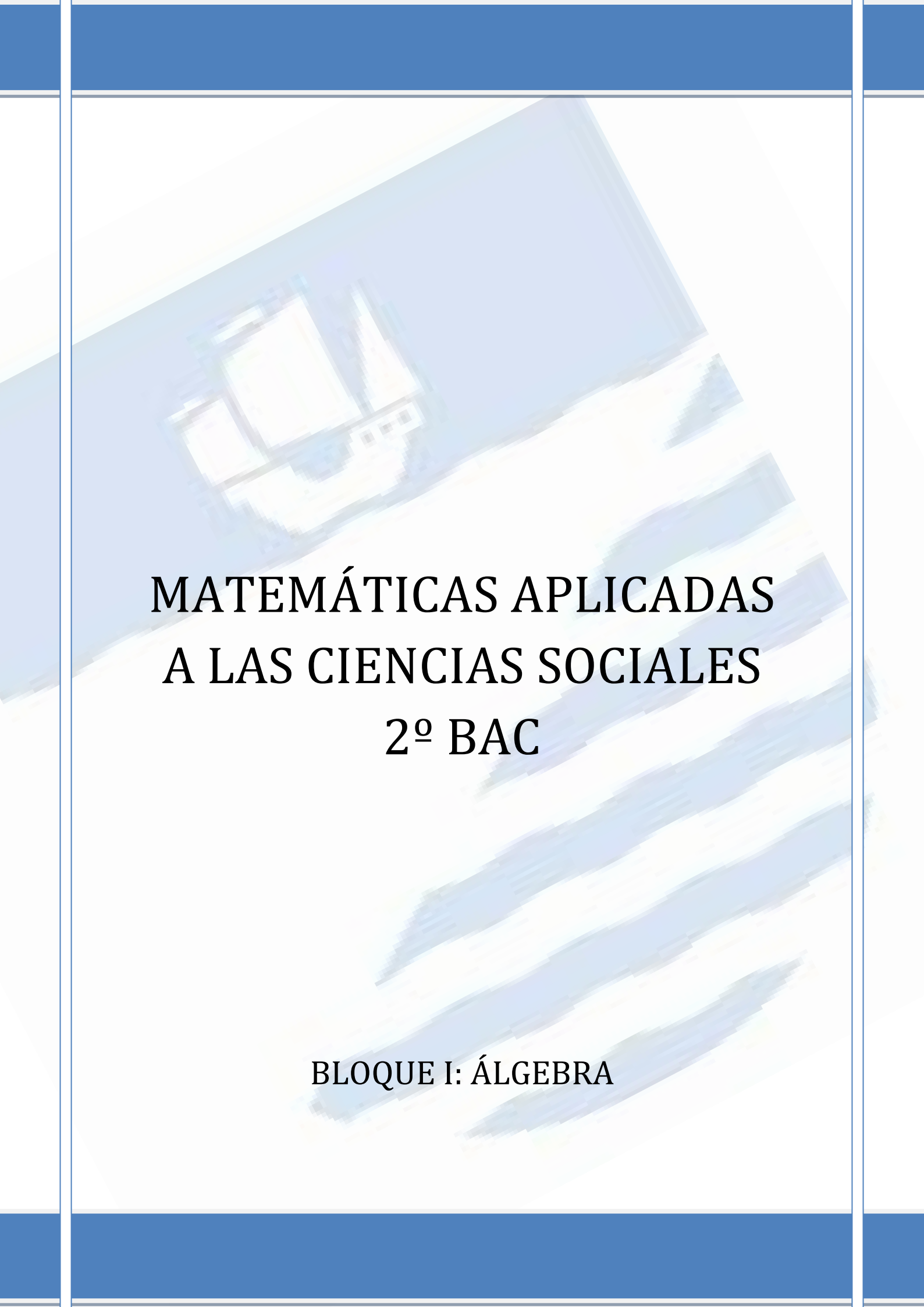




MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES 2º BAC

BLOQUE I: ÁLGEBRA



TEMA 1: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

GUÍA

1. ¿Qué es la solución de una ecuación lineal? ¿Qué es la solución particular? ¿Qué es la solución general?
2. ¿Qué son los coeficientes? ¿Y los términos independientes? ¿Cómo se denotan?
3. ¿Qué es un sistema de ecuaciones? ¿Cómo se resuelven?
4. ¿Qué es un sistema homogéneo?
5. ¿Qué tipo de ecuaciones lineales hay?
6. ¿Cuándo dos sistemas son equivalentes?
7. ¿Cómo se resuelven los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas?
8. ¿Cómo se resuelve un sistema por el Método de Gauss?
9. Interpretación geométrica de los diferentes tipos de sistemas.

EJERCICIOS

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y di de que tipo son:

$$\text{a)} \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$$

2. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss:

$$\text{a)} \begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

3. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y di de que tipo son:

$$\text{a)} \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$



4. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y di de que tipo son:

$$a) \begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{cases}$$

5. Clasifica los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

6. Un almacenista dispone de tres tipos de café: el A, de 9,80 €/kg; el B, de 8,75 €/kg, y el C, de 9,50 €/kg. Desea hacer una mezcla con los tres tipos de 10,5 kg a 9,40 €/kg. ¿Cuántos kilos de cada tipo debe mezclar si tiene que poner del tipo C el doble de lo que ponga del A y del B?

Sol: Debe mezclar 1,5 kg de A, 2 kg de B y 7 kg de C.

7. Halla un número de tres cifras sabiendo que estas suman 9; que si al número dado se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198, y que la cifra de las decenas es media aritmética de las otras dos.

Sol: El número es el 432.

8. Dos amigos invierten 20 000 € cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4% de interés; una cantidad B, al 5%, y el resto, al 6%, ganando 1 050 € de intereses. El otro invierte la misma cantidad A al 5%; la B, al 6%, y el resto, al 4%, ganando 950 €. Determina las cantidades A, B y C.

Solución: A = 5000 €; B = 5000 €; C = 10000 €.

9. Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6 384 €. El precio original era de 12 €, pero también ha vendido copias defectuosas con descuentos del 30% y del 40%. Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad que el de copias en buen estado, ¿a cuántas copias se les aplicó el 30% de descuento?

Solución: El 30% de descuento se le aplicó a 120 copias.

10. Para fabricar collares con 50, 75 y 85 perlas, se utilizan en total 17 500 perlas y 240 cierres.



- a) ¿Cuántos collares de cada tamaño se han de fabricar si se desean tantos collares de tamaño mediano como la media aritmética del número de collares grandes y pequeños?
- b) Sin la condición anterior, ¿es posible fabricar el mismo número de collares de cada tamaño?

Solución: a) Se fabricarán 60 collares pequeños, 80 medianos y 100 grandes. b) No es posible fabricar el mismo número de collares de cada tamaño.

11. Se utilizan tres ingredientes, A, B y C, en la elaboración de tres tipos de pizzas, P1, P2 y P3. La P1 se elabora con 1 unidad de A, 2 de B y 2 de C; la P2 se elabora con 2 unidades de A, 1 de B y 1 de C; y la P3 se elabora con 2 unidades de A, 1 de B y 2 de C. El precio de venta es de 4,80 € por la P1, 4,10 € por la P2 y 4,90 € por la P3. Si el beneficio es de 1,60 € en cada una, ¿cuánto cuesta cada unidad de A, B y C?

Solución: La unidad de A cuesta 0,6 €; la unidad de B, 0,5 €, y la unidad de C, 0,8 €.

12. Tres hermanos quieren reunir 26 euros para comprar un regalo a sus padres. Después de una larga discusión han decidido que el mediano debe poner el doble que el pequeño y el mayor debe poner dos terceras partes de lo que ponga el mediano. ¿Cuánto debe poner cada uno?
13. En los tres cursos de una diplomatura hay matriculados un total de 350 alumnos. El número de matriculados en primer curso coincide con los de segundo más el doble de los de tercero. Los alumnos matriculados en segundo más el doble de los de primero superan en 250 al quintuplo de los de tercero. Calcula el número de alumnos que hay matriculados en cada curso.
14. Se han preparado dosis con dos tipos de complementos para los astronautas de la nave *Enterprise*. Cada gramo de complemento **A** contiene 2 unidades de riboflavina, 3 de hierro y 2 de carbohidratos. Cada gramo de complemento **B** contiene 2 unidades de riboflavina, 1 de hierro y 4 de carbohidratos. Obtén el número de gramos del complemento A y del complemento B necesario para producir exactamente una dosis de 12 unidades de riboflavina, 16 de hierro y 14 de carbohidratos.
15. Un pescadero compra un martes 96 kg de merluza y 130 kg de anchoas y paga por ello 1 836 euros. El miércoles, debido a cierta crisis, el precio de la merluza ha subido el 20 % y el de las anchoas el 30 %. Ese día compra 40 kg de merluza y 50 kg de anchoas y paga 918 euros. ¿Son los datos anteriores suficientes para calcular el precio que tenían la merluza y las anchoas el martes? Razona la respuesta.

**SELECTIVOS**

PROBLEMA 1. Hemos invertido 4.000.000 ptas en acciones de las empresas A, B y C. Después de un año, la empresa A repartió un beneficio del 6 %, la B del 8 % y la C del 10 %. En total recibimos 324.826 ptas.

- a) Deducid razonadamente si se puede determinar o no lo que invertimos en cada empresa.
- b) Deducid razonadamente cuánto invertimos en cada empresa sabiendo que en la empresa C invertimos el doble que en la empresa A.

Solución

- a) no es posible determinar con exactitud y de manera única las cantidades invertidas en A, B y C, sino expresar lo invertido en A y B en función de lo invertido en C.
- b) (241300, 3276100, 482600)

PROBLEMA 2. Un tren transporta 500 viajeros y la recaudación del importe de los billetes de ellos asciende a 2115 euros. Calcular, de forma razonada, cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 9 euros, cuántos han pagado el 20 % del billete y cuántos el 50 %, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 20 % es el doble del número de viajeros que han pagado el billete entero.

Solución: 150 viajeros han pagado la totalidad del billete, 300 han pagado el 20 %, 50 han pagado el 50 %.

PROBLEMA 3. (Junio 2003) Cinco amigos salen a tomar cafés juntos. El primer día tomaron 2 cafés, 2 cortados y un café con leche y debieron pagar 3 €. Al día siguiente tomaron un café un cortado y tres cafés con leche, por lo que pagaron 3,25 €. El tercer día sólo acudieron cuatro de ellos y tomaron un café, dos cortados y un café con leche, ascendiendo la cuenta a 2,45 €. Calcular de forma razonada el precio del café, del cortado y del café con leche.

Solución: El café vale 55 céntimos, el cortado 60 céntimos y el café con leche 70 céntimos.

PROBLEMA 4. (Junio 2004) Juan decide invertir una cantidad de 12000 € en bolsa, comprando acciones de tres empresas distintas, A, B y C. Invierte en A el doble que en B y C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la empresa A se han revalorizado un 4 %, las de B un 5 % y las de C han perdido un 2 % de su valor original. Como resultado de todo ello, Juan ha obtenido un beneficio de 432,5 €. Determinar cuánto invirtió Juan en cada una de las empresas.

Solución: (8000, 3892.86, 107.14)



PROBLEMA 5. Elena, Pedro y Juan colocan diariamente hojas de propaganda sobre los parabrisas de los coches aparcados en la calle. Pedro reparte siempre el 20 % del total de propaganda, Juan reparte 100 hojas más que Elena y entre Pedro y Elena colocan 850 hojas en los parabrisas. Plantear un sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántas hojas reparten, respectivamente, Elena, Pedro y Juan y calcular estos valores.

Solución: Elena coloca 550 hojas, Pedro 300 y Juan 650.

PROBLEMA 6. (2006) Tres constructoras invierten en la compra de terrenos de la siguiente forma: la primera invirtió medio millón de euros en terreno urbano, 250.000 euros en terreno industrial y 250.000 euros en terreno rústico. La segunda, invirtió 125.000, 250.000 y 125.000 euros en terreno urbano, industrial y rústico, respectivamente, y la tercera, 100.000, 100.000 y 200.000 euros en estos mismos tipos de terreno, respectivamente. Transcurrido un año, venden todos los terrenos. La rentabilidad que obtiene la primera constructora es del 13,75%, la de la segunda del 11,25 % y, finalmente, la de la tercera es del 10 %. Determina la rentabilidad de cada uno de los tipos de terreno por separado.

Solución: $x=20\%$, $y=10\%$, $z=5\%$.

PROBLEMA 7 (2007). Los tres modelos existentes de una marca de automóviles cuestan 12.000, 15.000 y 22.000 €, respectivamente. Un concesionario ha ingresado 1.265.000 € por la venta de esta marca. ¿Cuántos coches ha vendido de cada modelo si del más barato se vendieron tantos como de los otros dos juntos y del más caro la tercer aparte de los coches que cuestan 15.000 €?

Solución: (44, 33, 11)

PROBLEMA 8 (2004): Dos hijos deciden hacer un regalo de 100 € a su madre. Como no tienen suficiente dinero, cuentan con la ayuda de su padre, decidiendo pagar el regalo de la siguiente forma: el padre paga el triple de lo que pagan los dos hijos juntos y, por cada 2 € que paga el hermano menor, el mayor paga 3 €. ¿Cuánto dinero ha de poner cada uno? **Solución:** (15, 10, 75)

PROBLEMA 9. Una persona adquirió en el mercado cierta cantidad de unidades de memoria externa, de lectores de libros electrónicos y de tabletas gráficas a un precio de 100, 120 y 150 euros la unidad, respectivamente. El importe total de la compra fue de 1160 euros y el número total de unidades adquiridas 9. Además, compró una unidad más de tabletas gráficas que de lectores de libros electrónicos. ¿Cuántas unidades adquirió de cada producto?

Solución: Adquirió 2 unidades de memoria externa, 3 libros electrónicos y 4 tabletas gráficas.



TEMA 2: MATRICES

GUÍA

1. ¿Qué es una matriz de números reales? ¿Para qué sirve?
2. ¿Qué es orden o dimensión de una matriz?
3. ¿Cómo se nombra a un elemento cualquiera de una matriz?
4. ¿Cuándo dos matrices son iguales?
5. Define y pon ejemplos de :
 - a) Matriz fila
 - b) Columna
 - c) Cuadrada
 - d) Opuesta de A
 - e) Traspuesta de A
 - f) Diagonal principal
 - g) Diagonal secundaria
 - h) Triangular superior
 - i) Triangular inferior
 - j) Diagonal
 - k) Simétrica
 - l) Identidad
 - m) Nula
6. ¿Cómo se suman dos matrices? ¿Qué condición tienen que tener para que se puedan sumar? Ejemplo.
7. ¿Qué propiedades tiene la suma de matrices?
8. ¿Cómo se multiplica una matriz por un número? Ejemplo. ¿Se puede hacer siempre esta operación? ¿Qué propiedades tiene?
9. ¿Cómo se multiplican dos matrices? Ejemplo. Explica el proceso. ¿Esta operación se puede hacer siempre?
10. ¿Qué propiedades tiene la multiplicación de dos matrices?
11. ¿Cómo se eleva una matriz a una potencia? ¿Se puede siempre?
12. ¿Qué es la matriz inversa de otra dada? ¿Cómo se obtiene? Pon un ejemplo.
13. Ecuaciones y sistemas matriciales.

EJERCICIOS

1. Tres personas, A, B, C, quieren comprar las siguientes cantidades de fruta:

A: 2 kg de peras, 1 kg de manzanas y 6 kg de naranjas.

B: 2 kg de peras, 2 kg de manzanas y 4 kg de naranjas.

C: 1 kg de peras, 2 kg de manzanas y 3 kg de naranjas.



Expresa matricialmente la cantidad de fruta (peras, manzanas y naranjas) que quiere comprar cada persona (A, B, C)

2. Calcula los valores de x , y , z para que las matrices $\begin{pmatrix} x-y & y+z \\ 2+x & 2x-4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ sean iguales.

3. Escribe una matriz en los casos:

- a) Nula de orden 3×2 .
- b) Cuadrada de orden 3.
- c) Diagonal de orden 2.
- d) Identidad de orden 4.
- e) Fila de orden 2.
- f) Columna de orden 4.
- g) Simétrica de orden 2.

4. Responde a las siguientes cuestiones

- a) ¿Cuál es la traspuesta de una matriz fila?
- b) ¿Cuál es la traspuesta de una matriz columna?
- c) Las matrices diagonales, ¿son simétricas?

5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, calcula $-B + (C - A)$

6. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$



Calcula $E = 2A - 3B + C - 2D$.

Solución:

$$E = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

7. Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}; \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}; \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}; \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}; \quad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

8. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

Solución: a)

b)

c) No tiene.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$



9. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

a)

No tiene.

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$$

10. Efectúa las siguientes operaciones con las matrices dadas:

A=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

B=

$$\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

C=

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $(A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A - B) \cdot C$

c) $A \cdot B \cdot C$

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$$

11. Dada la matriz $A =$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

comprueba que $(A - I)^2 = 0$.



12. Halla la matriz X en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $A^2X - B = AX$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $ABX = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

13. En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

- Escribe una matriz que describa el número y el tamaño de las ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.
- Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

Solución:

a)

$$\begin{matrix} & P & G \\ \begin{matrix} L3 \\ L4 \\ L5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} & C & B \\ \begin{matrix} P \\ G \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

b)

$$\begin{matrix} & P & G \\ \begin{matrix} L3 \\ L4 \\ L5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & C & B \\ \begin{matrix} P \\ G \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & C & B \\ \begin{matrix} L3 \\ L4 \\ L5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 20 & 34 \\ 26 & 44 \\ 32 & 54 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



14. Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M1, M2, M3 y M4.

$$\begin{array}{c} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 \\ \mathbf{M}_4 \end{array} \begin{array}{cc} \mathbf{T} & \mathbf{O} \\ \left(\begin{array}{cc} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{array} \right) \end{array}$$

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M1, el 5% en el M2, el 8% en el M3 y el 10% en el M4.

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

Solución:

$$\begin{array}{c} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{array} \begin{array}{cccc} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \\ \left(\begin{array}{cccc} 0,02 & 0,05 & 0,08 & 0,1 \\ 0,98 & 0,95 & 0,92 & 0,9 \end{array} \right) \end{array} \cdot \begin{array}{c} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 \\ \mathbf{M}_4 \end{array} \begin{array}{cc} \mathbf{T} & \mathbf{O} \\ \left(\begin{array}{cc} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{array} \right) \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{T} \\ \mathbf{B} \end{array} \begin{array}{cc} \mathbf{T} & \mathbf{O} \\ \left(\begin{array}{cc} 96 & 60,9 \\ 1354 & 869,1 \end{array} \right) \end{array} \approx \begin{array}{c} \mathbf{T} \\ \mathbf{B} \end{array} \begin{array}{cc} \mathbf{T} & \mathbf{O} \\ \left(\begin{array}{cc} 96 & 61 \\ 1354 & 869 \end{array} \right) \end{array}$$

15. Calcula la matriz $\mathbf{M} = \mathbf{P}^2 - 3\mathbf{P} - 2\mathbf{I}$, siendo $\mathbf{I}$ la matriz identidad de orden 2 y

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

16. Calcula:

- La inversa de la matriz A:
- La matriz X que verifica $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$, siendo A la matriz anterior y $\mathbf{B} = (1 \ -1 \ 0)$.

Siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

17. Determina a y b de forma que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$.

Solución: $a = 2$ y $b = -1$.

18. Obtener de forma razonada la matriz X que verifique $AX=2B-C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$$

19. Dadas las matrices A y B tales que:

- A tiene cuatro filas y una columna y el único elemento distinto de 0 es $a_{21} = 1$.
- B tiene cuatro columnas y una fila y el único elemento distinto de 0 es $b_{12} = 1$.

Calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

20. Tenemos las matrices cuadradas reales de orden 2, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula:

- La matriz P^{-1}
- La matriz real cuadrada X de orden 2, tal que $P^{-1}XP=Q$
- La matriz $(PQP^{-1})^2$

21. Sean I y A las matrices cuadradas siguientes: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$. Se pide calcular, escribiendo explícitamente, las operaciones necesarias:

- Las matrices A^2 y A^3
- Los números reales α y β para los que se verifica $(I + A)^3 = \alpha I + \beta A$



22. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

calcular razonadamente la matriz que satisface la ecuación $(AB^t + C)X = (A^t D)E$, donde M^t significa la matriz transpuesta de la matriz M

23. Dadas las matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se pide:

- Calcular la matriz $M = A - 2BC$
- Calcular la matriz D^{-1} inversa de D y calcular tal matriz
- Calcular las matrices X, Y que cumplen $DX = M = YD$

24. Encuentra dos matrices X e Y que verifiquen:

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

25. Halla las matrices X e Y que verifican el sistema:

$$2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:



$$X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

26. Halla dos matrices A y B tales que:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$-A + 5B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

SELECTIVOS

1. Obtener de forma razonada la matriz X que verifica $AX=2B-C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Calcular el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que verifique $AX+B=C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

3. Resolver la ecuación matricial: $AB + CX = D$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$



4. En la tabla siguiente se indica la audiencia prevista (en miles de espectadores), por tres cadenas de T.V. (A, B, y C), en determinada semana y en cada uno de los tres segmentos horarios (mañana, tarde y noche):

	A	B	C
Mañana	40	60	150
Tarde	60	50	20
Noche	150	90	70

Sin embargo como consecuencia de la calidad de los programas emitidos, se ha producido en la audiencia prevista (en todos los segmentos horarios), una reducción del 10% en la cadena A, un 5% en la cadena B, y un aumento del 20% en la cadena C.

- a) Obtener la matriz que expresa la audiencia real obtenida por dichas cadenas de T.V.
- b) Sabiendo que el beneficio por espectador es de 5€ por la mañana, 6€ por la tarde y 9€ por la noche, obtener los beneficios por cada una de las tres cadenas.
- c)

5. En una academia de idiomas se imparte inglés y alemán en cuatro niveles y dos modalidades: grupos normales y grupos reducidos. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 130 & 160 \\ 120 & 80 \\ 210 & 130 \\ 100 & 60 \end{pmatrix}$$

expresa el número de personas de cada grupo, donde la primera columna corresponde a los cursos de inglés, la segunda a los de alemán y las filas, a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto, respectivamente. Las columnas de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.25 & 0.4 & 0.75 \\ 0.8 & 0.75 & 0.6 & 0.25 \end{pmatrix}$$

reflejan el porcentaje de estudiantes (común para ambos idiomas) que siguen curso reducido (primera fila) y curso normal (segunda fila) para cada uno de los niveles.

- a) Obtener la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma.
- b) Sabiendo que la academia cobra 20€ por persona en grupos reducidos y 15€ por persona en grupo normal, hallar la cantidad ingresada en cada uno de los idiomas.



TEMA 3: DETERMINANTES

GUÍA

1. ¿Qué es un determinante de una matriz cuadrada?
2. ¿Cómo se calcula un determinante de orden 2? Ejemplo.
3. ¿Cómo se calcula un determinante de orden 3? Ejemplo.
4. ¿Cuándo una matriz es regular?
5. Enuncia y pon ejemplo de cada una de las 9 propiedades que tienen los determinantes.
6. Define matriz complementaria de un elemento a_{ij} . Ejemplo
7. Define menor complementario de un elemento a_{ij} . Ejemplo.
8. Define adjunto de un elemento a_{ij} . Ejemplo.
9. Define matriz adjunta.
10. Explica cómo se calcula un determinante por desarrollándolo por los elementos de una fila o columna. Ejemplo.
11. Cálculo de la matriz inversa por determinantes. Ejemplo.
12. ¿Toda matriz tiene inversa? ¿De qué depende? Ejemplo.
13. ¿Qué es rango de una matriz? Ejemplo.
14. ¿Qué es menor de orden p de una matriz? Ejemplo
15. ¿Cuándo dos filas son linealmente independientes?
16. ¿Cuándo tres filas son linealmente independientes? ¿Tiene que ver esto con alguna propiedad de los determinantes?
17. ¿Cómo se estudia el rango de una matriz? Ejemplo

EJERCICIOS

1. Calcula el valor de estos determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 33 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 373 & 141 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Solución: a) 17 b) 0, porque la 2.ª fila es proporcional a la 1.ª. c) 0, porque la 2.ª fila solo tiene ceros. d) -14

2. Calcula:

$$a) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} a & b \\ ac & bc \end{vmatrix}$$

Solución: a) $a \cdot d - b \cdot c$. b) $a^2 \cdot b^2(b - a)$. c) y d) 0



3. Calcula los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución: a) -114 b) 3

4. Halla el valor de estos determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

Solución: a) 14 b) 1000

5. Justifica, sin desarrollar, estas igualdades:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Solución: a) Tiene una fila de ceros. b) La 3.ª fila es proporcional a la 1.ª. c) La 3.ª fila combinación lineal de las dos primeras. d) La 1.ª fila es combinación lineal de las otras dos.

6. Teniendo en cuenta el resultado del determinante que se da, calcula el resto sin desarrollar:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Solución: a) 3, b) 1, c) 1.



7. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 7$, justifica las siguientes igualdades, citando en cada caso las propiedades que has aplicado:

a) $\begin{vmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{vmatrix} = 7$

b) $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} = 42$

c) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -7$

d) $\begin{vmatrix} a & b \\ a-2c & b-2d \end{vmatrix} = -14$

Solución: a) Si a una columna de una matriz se le suma la otra columna multiplicada por un número, el determinante queda multiplicado por ese número. b) Si multiplicamos cada elemento de una columna por un número, el determinante queda multiplicado por ese número. c) Si permutamos las dos columnas, el determinante cambia de signo. d) Si una fila es suma de dos, el determinante puede descomponerse en suma de dos determinantes.

8. Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, ¿cuál es el valor de cada uno de estos determinantes?:

a) $\begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$

Solución: a) -5; b) 5; c) -15; d) 10; e) -5.

9. Calcula el valor de estos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

Solución: a) 0; b) 0; c) -25; d) 10.



10. ¿Qué valor de a anula estos determinantes?:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}$$

Solución: a) 1; b) 1 y -3; c) $\sqrt{3}$ y $\sqrt{-3}$; d) 2 y -3.

11. Halla dos menores de orden dos y otros dos menores de orden tres de la matriz M .

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

12. Halla el menor complementario y el adjunto de los elementos a_{12} , a_{33} y a_{43} de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución: $a_{12} = -2$; $A_{12} = 2$; $a_{33} = 108$; $A_{33} = 108$; $a_{43} = 16$; $A_{43} = -16$

13. Calcula el siguiente determinante aplicando la regla de Sarrus y desarrollándolo por cada una de sus filas y cada una de sus columnas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Comprueba que se obtiene el mismo resultado en los siete casos.

Solución: 456.



14. Calcula los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución: a) 2030, b) 0

15. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \quad \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

16. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

17. Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices y comprueba el resultado:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$



Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

d)

$$\frac{-1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

18. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $X \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a)

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$X = \begin{pmatrix} 6 & -7 \end{pmatrix}$$

19. Calcula la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Después, resuelve estas ecuaciones: a) $AX = B$ b) $XB = A$

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -19 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 4 & 3/2 & -7/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

20. Dadas $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Halla A^{-1} y B^{-1} .

b) Halla la matriz inversa de $A \cdot B$.

c) Comprueba que $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Solución: a)

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = A^{-1} \quad \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$



b)

$$\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} = (AB)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina la matriz B que verifica $B - I = A^t A^{-1}$.

Solución:

$$\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

22. Sea $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Halla los valores de x para los que A tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, A^{-1} para $x = 2$.

Solución: a) x distinto de 0; b)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

halla la matriz X que verifica $AB + CX = D$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

24. Halla X tal que $3AX = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Solución:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

25. Resuelve la ecuación $AXB = C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

26. Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

27. Determina si las siguientes ecuaciones tienen solución y hállala si es posible:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solución: a) No tiene solución;

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 5/4 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

28. Resuelve esta ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$.

29. Resuelve la ecuación siguiente:

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Solución:

$$\begin{pmatrix} 69 & -14 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

30. a) ¿Qué condición debe cumplir una matriz cuadrada para tener inversa?

b) ¿Existe algún valor de a para el cual la matriz $\begin{pmatrix} a & a^2 - 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ no tenga inversa?

Solución: a) La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero; b) No existe ningún valor de a para el que la matriz dada no tenga inversa.

31. Sean A y B inversas una de otra. Si $|A| = 4$, ¿cuánto vale $|B|$?

Solución: $\frac{1}{4}$

32. Halla, en cada caso, la matriz X que verifica la igualdad:

a) $A^{-1}XA = B$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $(A+X)B = I$, siendo

$$\text{Solución: a) } X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

33. Para cada terna de números reales (x, y, z) , se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{pmatrix}$$

- Calcular los determinantes de las matrices A y B . (1 punto)
- Para $x = y = z = 1$, calcular el determinante de la matriz producto AB . (0,3 puntos)
- Obtener, razonadamente, para qué valores de x, y, z , ninguna de las matrices A y B tiene inversa. (2 puntos)

34. Obtener la matriz X que verifica $AX - B = 3X$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



35. Calcular la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación matricial $AXB = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

36. Se dan las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y M, donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifican que $M^2 = M$.

37. Obtener **razonadamente**:

- Todos los valores reales k para los que la matriz $B = A - kI$ tiene inversa. (2 puntos)
- La matriz inversa B^{-1} cuando $k = 3$. (2 puntos)
- Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha A^2 + \beta A = -2I$ (4 puntos).
- Comprobar razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones: $P^2 = P$ y $MP = PM$. (2 puntos, repartidos en 1 punto por cada igualdad)

38. Se dan las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y T, y se sabe que T es una matriz cuadrada de 3 filas y tres columnas cuyo determinante vale $\sqrt{2}$.

39. Calcular razonadamente los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

- $\frac{1}{2}T$ (3 puntos)
- M^4 . (3 puntos)
- TM^3T^{-1} . (4 puntos)



40. Dadas las matrices cuadradas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

- Calcular las matrices $(A - I)^2$ y $A(A - 2I)$. (4 puntos)
- Justificar razonadamente que
 - Existen las matrices inversas de las matrices A y $A - 2I$. (2 puntos)
 - No existe la matriz inversa de la matriz $A - I$. (2 puntos)
- Determinar el valor del parámetro real λ para el que se verifica que $A^{-1} = \lambda(A - 2I)$. (2 puntos)

41. Dadas las matrices

$$A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B(y) = \begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- Obtener razonadamente el valor de x para que el determinante de la matriz $A(x)$ sea 6. (4 puntos)
- Calcular razonadamente el determinante de la matriz $2A(x)$. (2 puntos)
- Demostrar que la matriz $B(y)$ no tiene matriz inversa para ningún valor real de y . (4 puntos)

42. Dada la matriz $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha - 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{pmatrix}$, se pide:

- Calcular, en función de α , el determinante de la matriz $A(\alpha)$, escribiendo los cálculos necesarios. (1,3 puntos).
- Determinar, razonadamente, los números reales α para los que el determinante de la matriz inversa de $A(\alpha)$ es igual a $1/66$. (2 puntos).

SELECTIVOS

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 1. (Junio 2007) Dada la matriz A , calcula $A \cdot A^t - 5 \cdot A^{-1}$,

siendo A^t y A^{-1} las matrices traspuesta e inversa de A respectivamente.



PROBLEMA 2. (Junio 2003) Dada la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Obtener de forma razonada los valores de x, y, z.

Solución: (-2, 1, -2)

PROBLEMA 3. (Septiembre 2005) Calcular la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación matricial $AXB = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 4. (septiembre 2002) Obtener de forma razonada la matriz X que verifica $AX=2B-C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 5. (Septiembre 2004) Obtener la matriz X que verifica $AX-B=3X$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X = (A - 3I)^{-1}B = \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 9/5 \\ 28/5 \end{pmatrix}$$



PROBLEMA 6. (Junio 2004) Dadas las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X que verifica la ecuación $\mathbf{AXB} = 2\mathbf{C}$.

PROBLEMA 7. (Septiembre 2006) Dadas las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X que verifica la ecuación $\mathbf{AXB} = 2\mathbf{C}$.



TEMA 4: DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

GUÍA

1. Discusión de sistemas mediante el Teorema de Gauss. ¿Cómo se resuelven? Ejemplo.
2. ¿Qué es la regla de Cramer? ¿Para qué sirve? ¿Se puede utilizar siempre? Ejemplo.
3. Clasifica los SEL según los rangos de la matriz y matriz ampliada. Teorema de Rouché.
4. ¿Cómo se resuelve un sistema si cuando el rango es menor que el número de incógnitas? ¿Qué es grado de indeterminación? ¿Para qué se utilizan los parámetros?. Ejemplo.
5. ¿A qué se le llama solución trivial?
6. Discusión de sistemas con parámetros. Ejemplos.
7. ¿En qué consiste la eliminación de parámetros en un SEL? Ejemplo.
8. ¿Siempre se puede hacer el proceso anterior o hay que tener alguna consideración?

EJERCICIOS

1. Resuelve los sistemas por el método de Gauss y di que tipo de sistema es:

$$a) \begin{cases} 3x + y + 4z = 3 \\ -x + 2y - 3z = 3 \\ 5x - 3y + 5z = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y + 2z = -1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ x - y + z = -4 \\ 2x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x + y - 2z = -4 \\ x - 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 3x + y + 4z = 3 \\ -x + 2y - 3z = 3 \\ 5x - 3y + 5z = 2 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + y - z = 2 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

2. Resuelve mediante la regla de Cramer:

$$a) \begin{cases} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 8 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$$

Solución: a) $x = 7$, $y = 2$, $z = -5$; b) $x = 5$, $y = 0$, $z = 3$.

3. Resuelve mediante la regla de Cramer:



$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 4y - z = 4 \\ y + z = 6 \\ 2x + 5y + 7z = -1 \end{cases}$$

Solución: a) $x=5$, $y=0$, $z=-2$; b) No tiene solución, el sistema es incompatible.

4. Estudia y resuelve estos sistemas, cuando sea posible, aplicando la regla de Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{cases}$$

Solución: a) $(-1/3, 2/3, 1/3)$. b) El sistema es incompatible. c) $(-1 - \lambda, \lambda, 1 - \lambda)$. d) $x=2$, $y=3$, $z=4$.

5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{cases}$$

Solución: a) El sistema es compatible indeterminado, $x=1 + \lambda$, $y=7\lambda$, $z=2\lambda$; b) El sistema es incompatible.

6. Estudia el rango de las siguientes matrices:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: a) El rango es 3. El rango es 2.

7. Estudia el rango según el valor del parámetro:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$



Solución: a) Si $a = 2$, $\text{ran}(A) = 2$. $a \neq 2$, $\text{ran}(A) = 3$. b) Si $a = 0$, $\text{ran}(B) = 2$. Si $a = \frac{1}{2}$, $\text{ran}(B) = 2$. Si $a \neq 0$ y $a \neq \frac{1}{2}$, $\text{ran}(B) = 3$. c) Si $a = 1$, $\text{ran}(C) = 2$. Si $a = -8$, $\text{ran}(C) = 2$. Si $a \neq 1$ y $a \neq -8$, $\text{ran}(C) = 3$. d) Si $a = -1$, $\text{ran}(D) = 2$. Si $a = 1$, $\text{ran}(D) = 2$. Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$, $\text{ran}(D) = 3$.

8. Estudia el rango según el valor del parámetro:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} a-2 & 1 & a-1 \\ a & a & 6 \end{pmatrix}$$

Solución: a) Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$, $\text{ran}(A) = 2$. Si $a = 1$, $\text{ran}(A) = 2$. Si $a = -1$, $\text{ran}(A) = 2$. El rango de A es 2 para cualquier valor de a . b) Si $a \neq 0$ y $a \neq 3$, $\text{ran}(B) = 2$. Si $a = 0$, $\text{ran}(B) = 2$. Si $a = 3$, las dos filas son proporcionales, $\text{ran}(B) = 1$.

9. Discute que tipo de sistema es (según el rango) y resuelve los sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Solución: a) El sistema es compatible determinado. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; b) El sistema es incompatible.

10. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{cases}$$

Solución: a) y b) $\text{ran}(A) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

11. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Solución: a) $x = -\lambda$, $y = -2\lambda$, $z = \lambda$. b) $x = \lambda$, $y = -\lambda$, $z = 0$, $t = 2\lambda$.

12. Discute y resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + az = 0 \\ ax - y = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = k \\ kx - y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{cases}$$

Solución: a) Si $a = 2$, sistema es incompatible. Si $a = -3/4$, sistema es incompatible. Si $a \neq 2$ y $a \neq -3/4$, el sistema es compatible determinado:



$$x = \frac{6-4a}{4a^2-5a-6}, y = \frac{a-6}{4a^2-5a-6}, z = \frac{3}{4a^2-5a-6}$$

- b) Si $k=2$, sistema es compatible determinado, $x=5$, $y=-3$. Si $k=5/3$, sistema es compatible determinado, $x=11/2$, $y=-23/6$. Si $k \neq 2$ y $k \neq 5/3$, sistema es incompatible.

13. Discute y resuelve, en función del parámetro a , el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

Solución: Si $a=0$, sistema compatible indeterminado, $x=\lambda$, $y=\lambda$. Si $a=1$, sistema compatible indeterminado, $x=\lambda$, $y=0$. Si $a \neq 0$ y $a \neq 18$, sistema solo tiene la solución trivial: $x=0$, $y=0$.

14. Estudia y, cuando sea posible, resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Solución: a) El sistema es compatible determinado. $x=1$, $y=-5$. b) El sistema es incompatible.

15. Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m :

$$\text{a) } \begin{cases} 7y + 5z = -7 \\ 3x + 4y + mz = -1 \\ 7x + 5z = 7 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + mz = 6 \\ mx = 0 \end{cases}$$

Solución: a) Si $m=5$, $\text{ran}(A)=2$, El sistema es compatible indeterminado. Si $m \neq 5$, $\text{ran}(A)=\text{ran}(A')=3$, el sistema es compatible determinado. b) Como $|A| \neq 0$ para cualquier valor de m , $\text{ran}(A)=\text{ran}(A')=3$. El sistema es compatible determinado para todo m . c) Si $m=10$, $\text{ran}(A)=\text{ran}(A')=2$, el sistema es compatible indeterminado. Si $m \neq 10$, $\text{ran}(A)=2 \neq \text{ran}(A')=3$, el sistema es incompatible. d) Si $m=0$, $\text{ran}(A)=\text{ran}(A')=2$, el sistema es compatible indeterminado. Si $m=2$, $\text{ran}(A)=2 \neq \text{ran}(A')=3$, el sistema es incompatible. Si $m \neq 0$ y $m \neq 2$, $\text{ran}(A)=\text{ran}(A')=3$. El sistema es compatible determinado.

16. Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a :

$$\begin{cases} 2x - ay + 4z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \\ x - y + 12z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - z = 0 \\ ay + 3z = 0 \\ 4x + y - az = 0 \end{cases}$$



Solución: a) Si $a = -6$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$, el sistema es compatible indeterminado. Si $a \neq -6$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$, el sistema es compatible determinado. b) Si $a = 1$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$, el sistema es compatible indeterminado. Si $a = 3$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$, el sistema es compatible indeterminado. Si $a \neq 1$ y $a \neq 3$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$, el sistema es compatible determinado.

17. ¿Existe algún valor de a para el cual estos sistemas tengan infinitas soluciones?

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

Solución: a) Si $a = -3$, $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$, el sistema es incompatible. Si $a \neq -3$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$, compatible determinado. Por tanto, no existe ningún valor de a para el que el sistema tenga infinitas soluciones. b) Si $a = 1$, el sistema es incompatible. Si $a = 2$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$, el sistema es compatible indeterminado. Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$, compatible determinado. Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones para $a = 2$.

18. Estudia y resuelve estos sistemas homogéneos:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Solución: a) $\text{ran}(A) = 2$, el sistema es compatible indeterminado, $x = \lambda/3$, $y = 2\lambda/3$, $z = \lambda$. b) $\text{ran}(A) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, el sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

19. Estudia y resuelve los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Solución: a) $\text{ran}(A') = 2 = \text{ran}(A) < \text{n.º de incógnitas}$, el sistema es compatible indeterminado, $x = 1 - \lambda$, $y = -1 - 7\lambda$, $z = 3\lambda$. b) $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = \text{n.º de incógnitas} = 3$, el sistema es compatible determinado, $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$.



20. Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m y resuélvelos cuando sea posible:

$$\text{a) } \begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$$

Solución: a) Si $m = 1$, el sistema es incompatible. Si $m = -1$, el sistema es incompatible. Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$, el sistema es compatible determinado y la solución es

$$\left(\frac{-m^2 + 3m + 4}{m^2 - 1}, \frac{m^3 - 7m + 6}{m^2 - 1}, \frac{m^2 + 3m - 10}{m^2 - 1} \right).$$

b) Si $m = 1$, $\text{ran}(A) \neq \text{ran}(A')$, el sistema es incompatible. Si $m = 2$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$, el sistema es compatible indeterminado, Las soluciones son: $x = 1 - \lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$. Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$,

el sistema es compatible determinado y la solución es $\left(\frac{-m^3 + 2m^2 + m - 2}{-m^2 + 3m - 2}, \frac{m^2 - 4m + 4}{-m^2 + 3m - 2}, \frac{-3m^2 + 4m - 2}{-m^2 + 3m - 2} \right)$. c) Si $m = 1$, $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$, el sistema es incompatible. Si $m \neq 1$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ de incógnitas, el sistema es compatible

determinado y la solución es $\left(\frac{3m - 2}{m - 1}, \frac{4}{2 - 2m}, \frac{m - 2}{1 - m} \right)$. d) Si $m = 3$, el sistema es incompatible. Si $m = 1$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ$ de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado y las soluciones son: $x = \lambda$, $y = -2\lambda$, $z = \lambda$. Si $m \neq 1$ y $m \neq 3$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') =$

$3 = n^\circ$ de incógnitas, el sistema es compatible determinado y la solución es $\left(\frac{1 - m}{m^2 - 4m + 3}, \frac{5m^2 - 16m + 11}{m^2 - 4m + 3}, \frac{1 - m}{m^2 - 4m + 3} \right)$.



21. Discute y resuelve los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$$

Solución: a) Si $a = -5$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$, el sistema es compatible indeterminado, las soluciones son $(\lambda/5, 7\lambda/5, \lambda)$. Si $a \neq -5$, solo tiene la solución trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$. b) Si $a = -3$ o $a = 2$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$, el sistema es compatible indeterminado, soluciones: $x = 2\lambda/3, y = -5\lambda/3, z = \lambda$ ($a = -3$), Soluciones: $x = -\lambda, y = 0, z = \lambda$ ($a = 2$). Si $a \neq -3$ y $a \neq 2$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$, solo existe la solución trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$.

22. Discute en función de a el siguiente sistema y resuélvelo si $a = 3$:

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ ax + 2y - z = 3a \\ 2x + ay - 2z = 6 \end{cases}$$

Solución: Si $a \neq -2$ y $a \neq 3$, $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 3$, y el sistema es compatible determinado. Si $a = -2$, $\text{ran}(M) = 2 < \text{ran}(M') = 3$, el sistema es incompatible. Si $a = 3$, $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 2 < n^\circ$ de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

23. Discute y resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - y - az = 1 \\ -3x + 2y + 4z = a \\ -x + ay + z = 0 \end{cases}$$

Solución: Si $a \neq 1$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$, y el sistema es compatible determinado, $\left(\frac{-a^3 - 3a + 2}{3(a-1)^2}, \frac{-a^2 + a - 1}{3(a-1)^2}, \frac{-a^2 - 2a + 2}{3(a-1)^2} \right)$. Si $a = 1$, $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$, el sistema es incompatible.



24. Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real α e incógnitas x, y, z ,

$$\begin{cases} (\alpha + 2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\alpha + 6)y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\alpha - 2)z = 0 \end{cases} \text{ se pide:}$$

- Calcular para qué valores de α el sistema sólo admite la solución $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. (1 punto)
- Para cada valor de α que hace indeterminado el sistema, obtener todas sus soluciones (1,8 puntos).
- Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $\alpha = -3$ (0,5 puntos).

Solución: a) $\text{rg}(A) = 3$ si $\alpha \neq 0, -3$. Para estos valores de α el sistema admite sólo la solución trivial. **b)** Si $\alpha = 0$, la solución es $(t, -3t, -5t)$ con t real. Si $\alpha = -3$, la solución es $(t, h, t+h)$ con t real. **c)** Si $\alpha = -3$ los tres planos son el mismo: coincidentes.

25. Determina el valor de m para cual el sistema
$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones, y obtén todas esas soluciones.

Calcular razonadamente que no hay valores de m para los que el sistema no tenga solución.

Solución: El sistema es compatible para cualquier valor de m :

- $\text{sim } \square\square\square, r(A) = r(M) = 3$. El sistema será compatible determinado.
- $\text{sim } = 4, r(A) = r(M) = 2$. El sistema será compatible indeterminado, cuya solución es $(-1+t, 2-t, t)$ con t real.

26. Dado el sistema de ecuaciones con incógnitas x, y, z ,

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = \alpha \\ 2x + 6y - 11z = 2 \\ x - 2y + 7z = 1 \end{cases} \text{ se pide:}$$

- Determinar razonadamente el valor de α para el cual el sistema es compatible (1,2 puntos).
- Para ese valor obtenido en a) de α , calcular el conjunto de soluciones del sistema (1,3 puntos).
- Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las tres ecuaciones del sistema, en función de los valores de α (0,8 puntos).

Solución: a) Para que el sistema sea compatible hay que exigir que $\alpha = 1$.

b) Para $\alpha = 1$, la solución es: $(1-4t, 5t, 2t)$ con t real. c) Si $\alpha = 1$ los planos dados se cortan en una recta, cuyas ecuaciones son las dadas anteriormente. Si $\alpha \neq 1$, los planos dados no tienen ningún punto en común. Como no hay dos ecuaciones con coeficientes proporcionales, no hay



una pareja de planos paralelos; por tanto, los planos se cortan dos a dos formando entre ellos un prisma triangular.

27. Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + y - z = \lambda \\ \lambda x + 2y - z = 3\lambda \\ 2x + \lambda y - 2z = 6 \end{cases}$$
, con λ , parámetro real, se pide:

- a) Determinar razonadamente para qué valores de λ es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible (1,3 puntos)
- b) Hallar el conjunto de las soluciones del sistema para el caso compatible determinado. (1 punto)
- c) Hallar el conjunto de soluciones del sistema para el caso compatible indeterminado (1 punto).

Solución:

- a) • Si $\lambda \neq 1, 2$, $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(M) \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.
- Si $\lambda = 1$, $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(M) = 3 \Rightarrow$ el sistema es incompatible.
- Si $\lambda = 2$, $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(M) = 3 \Rightarrow$ el sistema es incompatible.
- b) Para $\lambda \neq 1$ y 2 , la solución del sistema la hallamos por Cramer.
- c) El sistema nunca es compatible indeterminado.

28. Dado el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real, se pide:

- a) Determinar para qué valores de λ el sistema es: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.
- b) Obtener las soluciones en los casos compatible determinado y compatible indeterminado.

Solución:

- a) • Si $\lambda = 0$, $\text{r}(A) = \text{r}(M) = 2 \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.
- Si $\lambda = 1$, $\text{r}(A) = 2$ y $\text{r}(M) = 3 \Rightarrow$ el sistema es incompatible.
- b) Para $\lambda \neq 0$ y $-1 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

SELECTIVOS

PROBLEMA 1. (Junio 2007) Los tres modelos existentes de una marca de automóviles cuestan 12.000, 15.000 y 22.000 €, respectivamente. Un concesionario ha ingresado 1.265.000 € por la venta de esta marca. ¿Cuántos coches ha vendido de cada modelo si del más barato se vendieron tantos como de los otros dos juntos y del más caro la tercer aparte de los coches que cuestan 15.000 €?

Solución: (44, 33, 11)

PROBLEMA 2. (Junio 2002) Un tren transporta 500 viajeros y la recaudación del importe de los billetes de ellos asciende a 2115 euros. Calcular, de forma razonada, cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 9 euros, cuántos han pagado el 20 % del billete y



cuántos el 50 %, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 20 % es el doble del número de viajeros que han pagado el billete entero.

Solución: 150 viajeros han pagado la totalidad del billete, 300 han pagado el 20 %, 50 han pagado el 50 %.

PROBLEMA 3. (Junio 2006) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de Crámer:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 2z = -6 \\ x + z = 5 \\ 2x - y = 11 \end{array} \right\}$$

Solución: (3, -5, 2)

PROBLEMA 4. (Junio 2001) Calculad el valor de los determinantes $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Aplicad los resultados obtenidos para resolver por la regla de Crámer el sistema $\left. \begin{array}{l} x - 3y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{array} \right\}$.

Solución: $\left(\frac{12}{5}, \frac{4}{5} \right)$

PROBLEMA 5. (Junio 2005) Elena, Pedro y Juan colocan diariamente hojas de propaganda sobre los parabrisas de los coches aparcados en la calle. Pedro reparte siempre el 20 % del total de propaganda, Juan reparte 100 hojas más que Elena y entre Pedro y Elena colocan 850 hojas en los parabrisas. Plantear un sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántas hojas reparten, respectivamente, Elena, Pedro y Juan y calcular estos valores.

Solución: Elena coloca 550 hojas, Pedro 300 y Juan 650.

PROBLEMA 6. Una persona adquirió en el mercado cierta cantidad de unidades de memoria externa, de lectores de libros electrónicos y de tabletas gráficas a un precio de 100, 120 y 150 euros la unidad, respectivamente. El importe total de la compra fue de 1160 euros y el número total de unidades adquiridas 9. Además, compró una unidad más de tabletas gráficas que de lectores de libros electrónicos. ¿Cuántas unidades adquirió de cada producto?

Solución: Adquirió 2 unidades de memoria externa, 3 libros electrónicos y 4 tabletas gráficas.



TEMA 5: PROGRAMACIÓN LINEAL

GUÍA

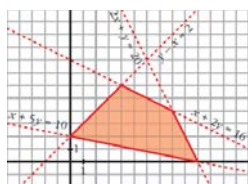
1. ¿Qué es una inecuación? ¿Cuándo dos inecuaciones son equivalentes? Ejemplo.
2. ¿Cómo es la solución de una inecuación? Ejemplo.
3. ¿Cómo se realizan las inecuaciones lineales con una incógnita? ¿Cómo son las soluciones? Pon un ejemplo.
4. ¿Cómo se realizan los sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita? ¿Cómo son las soluciones? Pon un ejemplo.
5. ¿Cómo se realizan las inecuaciones lineales con dos incógnitas? ¿Cómo son las soluciones? Pon un ejemplo.
6. ¿Cómo se realizan los sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas? ¿Cómo son las soluciones? Pon un ejemplo.
7. ¿Qué es la programación lineal? ¿Para qué sirve?
8. ¿Cómo se resuelven los problemas de programación lineal? ¿Cómo se expresa la solución del problema?

EJERCICIOS

1. Representa, de forma análoga, las siguientes inecuaciones:
a) $x + 5y > 10$ b) $x + 2y \leq 1$ 6 c) $2x + y \leq 20$
2. Representa el recinto formado por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} y - x \leq 2 \\ x + 5y \geq 10 \\ x + 2y \leq 16 \\ 2x + y \leq 20 \end{cases}$$

Solución:



3. Representa la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones: $x \geq 0$, $y \geq 3$, $x + y \leq 10$, $2y \geq 3x$. Averigua en qué puntos se hace máxima y mínima la función $F(x,y) = 4x + 3y$.

Solución: Mínima en $A(0, 3)$ y máxima en $C(4, 6)$.

4. Representa el recinto definido por estas inecuaciones: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 10$, $x \leq y$, $y - 2x \leq 6$, $3x + 4y \geq 35$. ¿En qué punto la función $F(x,y) = 10x + 15y$ alcanza el valor máximo?

Solución: $D(10, 26)$



5. Maximiza la función $F(x,y) = 25x + 20y$ sujeta a las siguientes restricciones: $x + y \leq 120$; $3y \leq x$; $x \leq 100$; $y \geq 10$.

Solución: El máximo se alcanza en $C(100, 20)$ y vale 2900.

6. a) Maximiza y minimiza la función $F(x,y) = 2x + 3y$ con las siguientes restricciones: $x + y \leq 5$; $x + 3y \geq 9$; $x \geq 0$, $y \geq 0$.

b) Haz lo mismo con la función $G(x,y) = y - x$.

Solución: a) El máximo de $F(x, y)$ se alcanza en $A(0, 5)$, y el mínimo, en $C(0, 3)$. b) El máximo de $G(x, y)$ se alcanza en $A(0, 5)$ y el mínimo, en $B(3, 2)$.

7. Maximiza la función $z = x + y + 1$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 0 \leq y \\ 0 \leq x \leq 10 \\ x \leq y \\ y - 2x \leq 6 \\ 3x + 4y \geq 24 \end{cases}$$

Solución: El máximo se alcanza en el punto $A(10, 26)$ y vale 37.

8. En la región determinada por $x + y \geq 5$, $x + 3y \geq 9$, $4x + y \geq 8$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, halla el punto en el que la función $F(x, y) = 2x + 3y$ alcanza su valor mínimo. ¿Puede alcanzar su máximo en esa región?

Solución: No tiene máximo, pues hay puntos en la región en los que $F(x, y)$ toma valores tan grandes como queramos.

9. Calcula los puntos del recinto

$$\begin{cases} 2x + y \geq 20 \\ 2x - y \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$$

que hacen mínima o máxima la función $z = 2x + y$. ¿Cuántas soluciones hay?

Solución: Punto $(20, 20)$

10. Es posible maximizar y minimizar la función $z = x + y + 1$ sujeta a estas restricciones?

$$\begin{cases} 3x + 4y - 13 \geq 0 \\ 2x - 3y - 3 \leq 0 \\ 5x - y - 27 \leq 0 \end{cases}$$

Solución: No existe máximo ni mínimo.



11. Las rectas $2x + y = 18$, $2x + 3y = 24$ y $x + y = 16$ se cortan dos a dos en tres puntos que son los vértices de un triángulo T . Sea S la intersección del triángulo T con el primer cuadrante. Halla el máximo de la función $z = 5x + 3y$ cuando x e y varían en S . Expresa el recinto mediante un sistema de inecuaciones.

Solución: El máximo se alcanza en el punto de corte de $x + y = 16$ con el eje X ; es decir, en el punto $(16, 0)$. El máximo vale $z = 5 \cdot 16 + 3 \cdot 0 = 80$. El sistema de inecuaciones que representa el recinto es:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x + y \geq 18 \\ 2x + 3y \geq 24 \\ x + y \leq 16 \end{cases}$$

12. Dibuja el recinto determinado por: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y - x + 1 \geq 0$, $y - 4 \leq 0$, $y + 2x - 5 \leq 0$.
- a) Localiza los puntos de este recinto en los que la función objetivo $F(x, y) = x + y$ se hace máxima y mínima, respectivamente.
- b) Sobre el mismo recinto, halla el máximo y el mínimo de la función $G(x, y) = 5x + y$.

Solución: a) $F(x, y)$ alcanza el máximo en el punto $(1/2, 4)$ y el mínimo en el punto $(0, 0)$. b) $G(x, y)$ alcanza el máximo en el punto $(2, 1)$ y el mínimo en el punto $(0, 0)$.

13. Considera el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 8)$ y $(10, 3)$. Determina razonadamente:
- a) El punto del triángulo donde la función $F(x, y) = -4x + y + 9$ alcanza el máximo.
- b) El punto del triángulo donde la función $F(x, y) = 4x + y + 12$ alcanza el máximo.

Solución: a) Hay infinitos puntos que hacen máxima la función: todos los puntos del lado que une los vértices $(0, 0)$ y $(2, 8)$. b) La función alcanza el máximo en el punto $(10, 3)$.

14. En una confitería se elaboran tartas de NATA y de MANZANA. Cada tarta de nata requiere medio kilo de azúcar y 8 huevos; y una de manzana, 1 kg de azúcar y 6 huevos. En la despensa quedan 10 kg de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántas tartas de cada tipo se deben hacer si pretendemos que los ingresos por su venta sean máximos? Considera estos casos:

- a) Sus precios son: nata, 12 €; manzana, 15 €.
- b) Sus precios son: nata, 16 €; manzana, 12 €.
- c) Sus precios son: nata, 15 €; manzana, 10 €.

Solución: Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 6y \leq 120 \\ (1/2)x + y \leq 10 \end{cases}$$

- a) Función objetivo: $F_1(x, y) = 12x + 15y$. Hacer 20 tartas de manzana y ninguna de nata. b) Función objetivo: $F_2(x, y) = 16x + 12y$. El máximo se consigue en cualquier punto, de



coordenadas enteras, del lado que pasa por los puntos $A(0, 20)$ y $B(12, 4)$. Además de estas dos, las soluciones son $(3, 16)$, $(6, 12)$ y $(9, 8)$ (la primera coordenada indica las tartas de nata que habría que hacer y la segunda, las tartas de manzana). c) Función objetivo: $F_3(x, y) = 15x + 10y$. El máximo son 12 tartas de nata y 4 de manzana.

15. Una persona quiere invertir 100 000 € en dos tipos de acciones A y B. Las de tipo A tienen más riesgo, pero producen un beneficio del 10%. Las de tipo B son más seguras, pero producen solo el 7% nominal. Decide invertir como máximo 60 000 € en la compra de acciones A y, por lo menos, 20 000 € en la compra de acciones B. Además, quiere que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B. ¿Cómo debe invertir los 100 000 € para que el beneficio anual sea máximo?

Solución: Punto $(6, 4)$. Debe invertir 60 000 € en acciones de tipo A y 40 000 € en acciones de tipo B.

16. Un sastre tiene 80 m² de tela de algodón y 120 m² de tela de lana. Un traje de caballero requiere 1 m² de algodón y 3 m² de lana y un vestido de señora necesita 2 m² de cada una de las telas. Halla el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden por el mismo precio.

Solución: debe confeccionar 20 trajes y 30 vestidos.

SELECTIVOS

PROBLEMA 1. Un estudiante reparte propaganda publicitaria para conseguir ingresos. Le pagan 8 cts. De euro por cada impreso colocado en el parabrisas de un coche y 12 cts. Por cada uno depositado en un buzón. Ha calculado que cada día puede repartir como máximo 150 impresos y la empresa le exige diariamente que la diferencia entre los colocados en coche y el doble de los colocados en buzones no se inferior a 30 unidades. Además, tiene que introducir en buzones al menos 15 impresos diariamente. ¿Cuántos impresos debe colocar en coches y buzones para maximizar sus ingresos diarios? ¿Cuál es este ingreso máximo?

Solución: Debe colocar 110 impresos en los coches y 40 en buzones. De esta forma conseguirá unos ingresos diarios de 13'60€.